

Mechanics Design II 期末試験解説

竹之内 和樹 <http://www.design.kyushu-u.ac.jp/~ktake>

2020年2月13日

1 静止した流体中で物体が受ける力：浮力

1. 以下の各問に答えよ。理由の記述がない解答は無効。

- (1) 樹脂片の質量を測定するために、空気で満たした容器の中で上皿天秤に樹脂片を載せ、黄銅製の分銅とつりあわせた。その後、天秤に樹脂片と分銅を載せたまま、測定環境から空気を抜いて真空の状態にすると、天秤のつりあいはどうなるか。理由を付して答えよ。ただし、樹脂の密度は黄銅のそれより小さいものとする。

つり合いが崩れて、樹脂側が下がる。

樹脂側に、分銅側よりも大きな浮力が作用してつり合っていたところから、浮力がなくなることによる。空気の中で実感がわかないときには、水の中で大きさの異なる物体をつり合った状態にして、水から上げたときを考えてみなさい。水中でも空気中でも、物体の周りの流体が密度を持ち、重力(加速度)が作用していれば、浮力が作用する。

以下は、式を用いた説明です。

樹脂の密度と体積および質量をそれぞれ ρ , V および M , 分銅のそれらを ρ' , v および m とすると、 $\rho < \rho'$ なので、 $V > v$ 。

※ 代表的な金属と樹脂の密度を調べてみよう。通常、空気による浮力により、つり合いが逆転するようなことはありません。

ここで、空気の密度を ρ_a とすると、空気中での天秤のつり合いの状態は、

$$(Mg - \rho_a V) \times r - (mg - \rho_a v) \times r = 0$$

ただし、 r は天秤の腕の長さである。なお、上皿天秤では、試料や分銅を載せる皿上の位置がつり合いに影響をしないように、ロベルバル機構が採用されている。どのように巧妙な機能が実現されているか、調べてみるとよい。

このつり合いの状態から空気を抜くと、空気による浮力が消失するので、上のつり合いは、

$$Mg \times r - mg \times r = \rho_a V \times r - \rho_a v \times r = \rho_a (V - v) \times r > 0$$

に変わり、樹脂の側が下がる。

浮力が作用する状態でつりあっているときには、体積の大きい方の質量が大きい、というこ

とです。

- (2) ヘリウムで膨らませた風船が、停まっている車の中で浮いて、天井に当たって止まっている。車が発車して加速しているとき、この風船はどのような挙動を示すか。理由を付して答えよ。

車の進行方向前向きを x 軸の方向・正の向き、鉛直上方を y 軸の方向・正の向きとする。車が静止した状態では、 $\partial p/\partial y = -\rho_a g$, $\partial p/\partial x = 0$ で、浮力は鉛直上向き、前後・左右には力は働かない。

これに対して、車が a で前方に加速している状態を車内からみれば、後方に見かけの加速度 $-a$ (後ろ向き) が作用する。これにより、 $\partial p/\partial x = -\rho_a a$ が追加されることで、車の前後方向・前向きの浮力も作用し、風船は前方に滑るか回転するかして移動する。風船の形と天井との摩擦によっては、風船の下部が前方にかしぐ姿勢の変化をする場合もある。要は、空気の海の中で深さ方向・上向きに浮き上がろうとする。

水が入ったコップを車に持ち込んで、車が加速するとき水面がどうなるか、考えてみよう。水面の方向は圧力が等しいので、水面に垂直に「浮力により浮き上がり」ます。空気で満たされた空間でも、質量を持つ流体の中にいることは同じです。

2 流れの連続性、運動量の変化と力積

開放空間 (圧力 p_a) で密度 ρ , 流速 V の一様な流れの中に車の小型模型を置き、模型から離れた下流の流速分布を測定したところ、流れは床面と平行で、床から h の高さだけ流速が $V/2$ になった。図の破線のように検査体積をとるとき、流れおよび車の模型は 2 次元性的であるとして、以下の各問に答えよ。ただし、紙面に垂直な方向の寸法は単位長さ 1 とせよ。

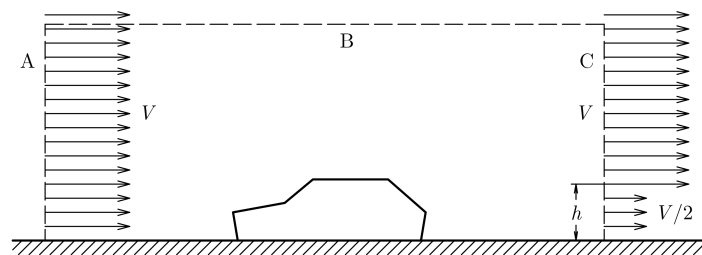


図 1 車の風洞試験

- (1) C 上の圧力の分布はどのようなものであるかを、理由とあわせて答えよ。

境界 C 上では、流速は互いに平行である。したがって、圧力勾配はなく、検査体積上端の大気圧 p_a と同じである。

※ 開放空間だから圧力一定なのではない。例えば、台風も開放空間内の流れであるが、中心の圧力が低い。

- (2) B から単位時間あたりに流出する体積
- q
- を求めよ。

検査体積を横切る流れの連続性から、単位時間に検査体積に流入する質量と流出する質量とは同じである。

$$\rho_a(V/2)h + \rho_a q - \rho_a Vh = 0$$

q について解くと、 $q = Vh/2$ 。

- (3) 模型に作用する抗力を
- D
- として、
- D
- と流れの関係を式で表せ。

A および C の上部の流れから、検査体積の上辺 B 上には模型による流れの変化はほとんど及んでおらず、流れは流速 V で、B に沿っていると考えてよい。

そうすると、空気の密度を ρ 、検査体積の高さを H として、

$$D \times 1 + p_a H \times 1 \times 1 - p_a H \times 1 \times 1 = \rho(V/2)^2 h \times 1 \times 1 + \rho q V - \rho V^2 h \times 1 \times 1$$

なお、上式の左辺の D に乗じた 1 は単位時間を、他の 1×1 は検査体積の奥行と単位時間を表している。式に書く必要はないが、どのような式が構成されているかを理解するために、意識しておくといよい。

- (4) (3) の式を解いて
- D
- の大きさを求めよ。(3) の式を
- D
- について解くと、

$$D = \rho \frac{V^2}{4} h + \rho \frac{V^2}{2} h - \rho V^2 h = -\frac{1}{4} \rho V^2 h$$

したがって D の大きさは $|D| = \rho V^2 h / 4$ (作用は左向き) である。

3 静水圧

断面が幅 b の矩形の水路がある。その水路に、幅 b の矩形の平板を、図のように水平から θ だけ傾けて差し込み、平板の左側の深さ D の水を堰き止めるとき、平板に作用する力 $F = (F_x, F_y)$ を求めよ。ただし、水平右向きを x 軸方向・正の向き、鉛直上向きを y 軸方向・正の向きとする。

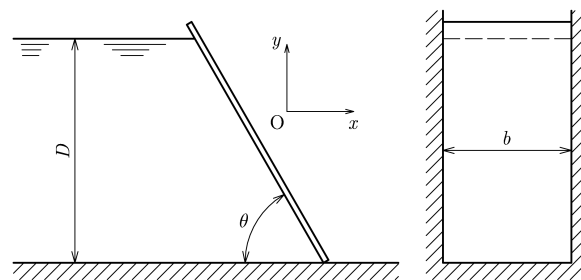


図2 傾斜した平板による水の堰き止め

水に作用する体積力は重力により $\partial p / \partial y = \rho g$, $\partial p / \partial x = 0$. 積分した $p(y) = -\rho g y + C$ (C は積分定数) に、境界条件 $y = D$ において $p(D) = p_a$ を代入すると、 $p(y) = \rho(D - y) + p_a$ ($y = D$ を代入すると $p(D) = p_a$). 板の水がない側の圧力は p_a で一定とみなせるので、高さ y において、板の2つの面の間に作用する圧力の差は、 $p(y) = \rho(D - y)$ である。これを板の全面について積算すれば、板に作用する力が得られる。

平板に沿った座標を y' とすると, y' 軸の水面の座標は $D/\sin\theta$, 平板に沿う微小長さ $dy = dy' \sin\theta$, さらに微小面積は $dA = Bdy'$ である. 平板の水がある側の面の単位法線ベクトルは $\mathbf{n} = (-\sin\theta \mathbf{i} - \cos\theta \mathbf{j}) = -\mathbf{i} \sin\theta - \mathbf{j} \cos\theta$, $y = y' \sin\theta$ なので,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_0^{D/\sin\theta} (-\mathbf{n})p(y')dA \\ &= \int_0^{D/\sin\theta} (-\mathbf{n})\rho g(D - y' \sin\theta)Bdy' \\ &= -\rho g \mathbf{n} B \left[Dy' - \frac{1}{2}y'^2 \sin\theta \right]_0^{D/\sin\theta} \\ &= -\rho g \mathbf{n} B \left(\frac{D^2}{\sin\theta} - \frac{1}{2} \frac{D^2}{\sin^2\theta} \sin\theta \right) \\ &= -\rho g \mathbf{n} \frac{BD^2}{2\sin\theta} \\ &= -\rho g (-\mathbf{i} \sin\theta - \mathbf{j} \cos\theta) \frac{BD^2}{2\sin\theta} \\ &= \rho g \frac{BD^2}{2} \mathbf{i} + \rho g \frac{BD^2 \cos\theta}{2\sin\theta} \mathbf{j} \\ &= \frac{1}{2} \rho g BD^2 \mathbf{i} + \frac{1}{2} \rho g BD^2 \cot\theta \mathbf{j} \end{aligned}$$

上では, 法線ベクトルを利用して式を x 軸成分と y 軸成分とでまとめて表したが, 板に垂直に作用する力を求めて, あとで x 軸方向成分と y 軸方向成分に分解してもよい.

結果をみれば, \mathbf{F} の x 軸方向成分には θ が関係せず, 平板を鉛直に差し込んだ状態の力と同じなので, 高さ方向中央の圧力 $\rho g D/2$ に板の面積を乗じて, 暗算でも算出できる. また, y 軸方向成分も, 板の真上にある水の重量として簡便に求められる. どのような仕組みでこのような結果になるのか, 以下に考えてみる.

静水圧の等方性による説明は, 講義資料を確認してもらおうとして, 次のふたつの思考実験をしてみよう.

左側が問題と同じ傾斜をしていて右側が鉛直の三角形のブロックを水路に置いてみよう. これでブロックに水平方向の力が作用するならば, 船に動力は要らなくなる. つまり水面下の形を変えても水平方向の力は変化しないことがわかる. その力を求めるには, 最も形が簡単な場合を利用すればよい.

水路全体に深さ H まで水が満たされている状態を考える. この中に, 問題と同じように板を入れると, 板にはどのように力が作用するだろうか.

板が薄いければ, 隣接する上向きと下向きの面素は深さが同じなので, 同じ圧力が作用する. これは水面から水路の底まで同様なので, 板に作用する鉛直方向の力は上下の面で同じである. ということは, 板の片側の水がない状態を考えれば, 板が水から受ける力がわかる.

そこで, 問題とは逆に板の右側 (上を向いた側) に水があり, 左側に水がないとしてみる.

すると、板の面素にかかる圧力は、その鉛直上方にある水の質量に作用する重力により生じているのだから、板にかかる力は、板の鉛直方向の範囲にある水の重量と同じになる。つまり、板の水平方向の長さを底辺とする三角形の面積 $D \times D \cot \theta / 2$ に奥行 b から計算した体積 $D^2 b \cot \theta / 2$ に水の密度 ρ と重力加速度 g を乗じて得られる。

4 熱伝導, 対流熱伝達

右図は、空気で満たされた空間を断熱材の壁で仕切って、片方（左側）を温めた状態である。壁から離れた点の温度をそれぞれ図の q_{in} および q_{out} ($q_{in} > q_{out}$)、空気の熱伝導率を λ_{air} 、断熱材の熱伝導率を $\lambda_m = 2\lambda_{air}$ とする。以下の各問に答えよ。

- (1) 板の内部および板付近の空間で熱はどのような形式で伝わるか、それらの名称を挙げ、それぞれについて知るところを述べよ。

板の内部では熱伝導、板の外部では対流熱伝達（自然対流）

※ それぞれについては、資料等で確認してください。

- (2) 図の縦方向を温度の軸（上向きを正）として、 q_{in} から q_{out} までの温度の変化を右図に線で示せ。線の形や勾配を熱の伝達の形式や熱の伝達に関する量に基づいて示し、線を描く時に注意した点を説明せよ。

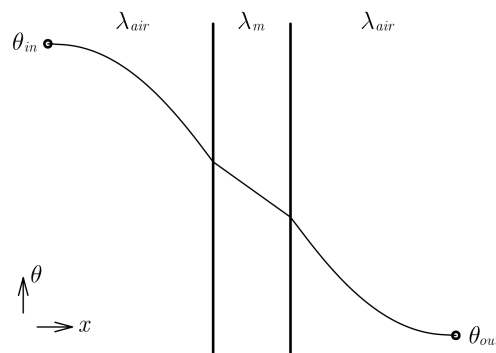


図3 断熱材の壁の両側の温度分布

空間では、 θ_{in} および θ_{out} の近くでは、勾配が極めてゆるやかで壁に近づくほどに勾配が急になる。左右方向に伝わる熱はどこでも同じであるが、壁から離れたところでは、壁付近よりも温められた、または冷却された空気の対流による熱移動〔対流熱伝達〕が行われるのに対して、壁表面では流れの滑りなし条件により熱伝導となる。

熱伝導の熱流束は Fourier の法則で表され $dq = -\lambda \partial \theta / \partial n dA$ 、熱流束が同じとき、温度勾配は熱伝導率に逆比例する。 $\lambda_m = 2\lambda_{air}$ なので、壁表面での空気側の温度勾配に対して、断熱材中のそれは $1/2$ である。

5 講義内容

右の 2 枚の写真 A, B は講義中に示したスライドに使用したものである。どちらか 1 枚を選んで、講義内容に関係するキーワードをふたつ答えよ。また、それぞれのキーワードについて知るところ、およびそれぞれの写真を用いた講義で学んだ内容を記述せよ。

写真 A ピトー静圧管 (大) とピトー管 (小)

流速の測定, ベルヌーイの式, 動圧, 静圧, 定常流れ, . . .

流速測定でよく用いられるピトー管 (全圧管) やピトー全圧管について説明した。流れを静圧と、流れをせき止めて静圧から動圧分だけ圧力増加した全圧を測定し、それらの差から動圧を取り出して流速を算出する。ピトー管を流れの方向に正しく向けることが必要であるが、全圧の測定だけならば $2,3^\circ$ は許容できることが多い。ピトー静圧管の静圧孔の位置は、先端での流れの回り込みによる圧力低下とステムによる流れのせき止めの圧力上昇とが相殺される位置に決められている。通常の実験に用いるピトー管・ピトー静圧管は大変に繊細であるが、航空機のそれは手で抱えるほどに大きいこと、ピトー静圧管の発展した形のひとつのコブラプローブなどを紹介した。

写真 B レーシングジャージのボルテックス・ジェネレータ

流れのはく離, 圧力勾配, 境界層, 主流, 乱流, 層流, 圧力抗力, 摩擦抗力, ボルテックス・ジェネレータ, すべり無し条件, . . .

物体の表面には主流よりも流速が小さい境界層が形成され、主流よりもエネルギーが低いので、負の圧力勾配 (圧力上昇) で流れがはく離することがあること、流れがはく離して物体の上流側と下流側とで圧力が非対象になることに起因する圧力抗力は、物体表面の粘性摩擦よりも一般に大きいことを解説した。

これを回避する方法のひとつに、境界層をはく離前に積極的に乱流化があり、物体表面の流速分布を改善 (流速が小さい部分を薄く) することによりはく離を遅らせる。これは、航空機を始めとする高速移動体に用いられている。このために物体表面に付加される機能要素をボルテックス・ジェネレータと呼ぶ。

上述の移動体の他に、わずかの時間差を競うスポーツでも用いられ、効果を上げている。類似の利用に、バレーボール表面の境界層制御による移動軌跡の安定化も紹介した。