

Mechanics Design 演習解説

竹之内 和樹 <http://www.design.kyushu-u.ac.jp/~ktake>

2020 年 1 月 7 日

1 流体の基礎知識，流れの力学の入り口の辺り

- [1] 関係する気体および周囲は標準状態 (SATP : 1000hPa, 25 °C) にあるとして，以下の各問に答えよ．単位を明記すること．ただし，上記の標準状態における 1mol の空気とヘリウムの体積をそれぞれ 24.8 リットル， H_e の原子量を 4，空気を体積比 (分圧比) $N_2 : O_2 = 4 : 1$ の混合気体， N_2 ， O_2 の分子量をそれぞれ 28, 32 とする．また，重力加速度 g と円周率 π には，それぞれ $g \doteq 10\text{m/s}^2$ ， $\pi \doteq 3$ の近似値を用いよ．

- (1) 質量 1kg の空気を，上記の標準状態で，質量が無視できる袋に密閉する．この袋を秤に載せるとき，秤が示す値はいくらか．

内部の空気の重量と，この体積に作用する外部の空気による浮力とが同じであるので，「零」

重力場や遠心力場で質量をもつ流体の中にあるときには，必ず浮力が働きます．地球上で質量 1kg の空気を支える力は，空気中と水中では異なります．

また，同じ 1kg でも，浮力が働くときには，空気と鉄 (体積が異なります) では，それらを支える力が異なります．

- (2) 直径 10m の球形の袋に， H_e がいっぱいに入っている．この袋をロープ 1 本で地面に繋ぎとめるとき，ロープに発生する張力 T はいくらか．ただし，袋およびロープの質量は無視するものとする．

気球の体積 $V = 4\pi R^3/3 = 500\pi/3[\text{m}^3]$ ．

ロープの張力は，体積 V に対する空気による浮力 B と袋の中の体積 V のヘリウムの重量 W との差つまり $T = B - W$ ．

空気の分子量，すなわち 1 mol の質量の算出計算，および H_e が単原子分子であることは高校の化学で学習済．計算を簡単にするために， g ， π の値に対する近似に加え，標準状態を SATP としました．

- [2] 材料が不明な直径 D の球がある．この球を，質量が無視できる円柱 (直径 D ，長さ $2D$) と糸でつないで水に入れたら，球は完全に水没し，円柱は軸を鉛直にして長さの 4/9 だけを水面から出した状態で浮いた．重力加速度を $g = 9.8\text{m/s}^2$ ，水の密度を $\rho = 1000\text{kg/m}^3$ とし以下各問に答えよ．

- (1) この球が中実であるとして，密度 ρ' を求めよ．
 (2) この球が単一な金属でできているとすると，その種類は何であると推定されるか．

円柱の質量は無視できるので、二つの物体に関する力のつり合いには、円柱と球に働く浮力と球の質量に作用する重力が関係する。球は全没、円柱は長さ $2D$ のうちの $5/9$ が水中にあるので、鉛直上向きを正とすると

$$\rho g \frac{\pi}{4} D^2 \times \frac{5}{9} \times 2D + \rho g \frac{\pi}{6} D^3 - \rho' g \frac{\pi}{6} D^3 = 0$$

これを ρ' について解いて

$$\rho' = \left(\frac{\frac{\pi}{4} D^2 \times \frac{10}{9} D}{\frac{\pi}{6} D^3} + 1 \right) \rho = \left(\frac{6 \times 10}{4 \times 9} + 1 \right) \rho = \frac{8}{3} \rho = \frac{8}{3} \times 1000 [\text{kg/m}^3] = 2667 [\text{kg/m}^3]$$

この密度を有する一般工業材料の金属は、アルミニウム (Al)。

一般的な流体や工業材料の物性値 **property** は覚えておきましょう。

- [3] 標準状態 (SATP : 1000hPa, $25^\circ\text{C} = 298.15\text{K}$) にある空気 0.1kg を、質量が無視できる袋に入れてドッジボールをしている。この袋を相手に投げつけたところ、体の表面に対して垂直に当たり、垂直にはねかえった。体に当たる直前の袋の速さが 3.0m/s 、体からはねかえった直後の速さが 2.0m/s 、袋と体との接触時間が 0.3s のとき、相手が受けた力 F の接触時間中の平均値 [N] はいくらか。
- [4] 常温の水銀を水平断面が縦×横 = $50\text{mm} \times 30\text{mm}$ の矩形で高さが 30mm の容器に満たした。以下の各問に答えよ。
- (1) この容器の中の水銀の重さはいくらか。適切な単位を付して答えよ。
 - (2) この容器に直径が 20mm で中実の銅の球を入れた様子を図に描け。
- [5] 身近な流体である空気と水について、以下の各問に答えよ。重力加速度には $g \sim 10\text{m/s}^2$ の近似値を用いてよい。
- (1) 常温で大気圧状態にある質量 1kg の空気と質量 1kg の水の体積は、それぞれどれ程か、適切な単位を付して答えよ。
 - (2) 大気圧の 2 倍の圧力になる水中の深さはどれだけか。

地球上で静止した状態の加速度は、鉛直方向下向きの重力加速度のみなので、高さ方向の圧力変化は $dp/dz = -\rho g$ と表され、これを積分することで指定した地点での圧力が求められる。

ρ , g ともに一定としていて右辺は定数なので、積分結果は基準高さから鉛直上向きにとった高度差に右辺の定数を乗じただけの $p_1 = p_0 - \rho g H$ の式になる。つまり、基準高さの圧力 p_0 に、指定された高さの差に比例する、水または空気の質量による圧力変化が加減される。

水面での圧力が大気圧 p_a なので、鉛直上向きには空気の密度を ρ_a として $p = p_a - \rho_a g H$ 、鉛直下向きには水の密度を ρ_w として $p = p_a + \rho_w g D$ (期末試験 問題 2 との対応で、深さを正值としてとった場合である)。水面下 D における圧力は $p = p_a + \rho_w g D$ であり、これが大気圧の 2 倍、すなわち $2p_a$ になるので

$$p_a + \rho_w g D = 2p_a$$

したがって

$$D = \frac{2p_a - p_a}{\rho_w g} = \frac{1000 \times 100 [\text{N/m}^2]}{1000 [\text{kg/m}^3] \times 10 [\text{m/s}^2]} = 10 [\text{m}]$$

ただし, $[\text{Pa}] = [\text{N/m}^2] = [\text{kg m/s}^2/\text{m}^2] = [\text{kg/ms}^2]$.

- (3) 富士山山頂の気圧はどれほどか有効数字 2 桁で概算せよ. ただし, 富士山頂の高さは 3776m, 空気の密度は地表から山頂まで一定とする.

空気の密度 ρ_a には $\rho_a \simeq \rho_w/800$ または類似の近似値を用いればよい (適当な温度を設定して状態方程式から求めても可).

$$\begin{aligned} p &= p_a - \rho_a g H \\ &= 1000 \times 100 [\text{N/m}^2] - 1000 [\text{kg/m}^3]/800 \times 10 [\text{m/s}^2] \times 3776 [\text{m}] \\ &= 52800 [\text{Pa}] = 528 [\text{hPa}] \end{aligned}$$

気象庁が発表した 2018 年 11 月 1 日の富士山頂の気温と気圧は, -4.0°C , 644.6hPa です. 上の計算では気圧・気温による空気密度の変化は考慮していませんが, さほど遠くない値が得られています.

- (4) 湿った空気と乾いた空気を同一温度・同一圧力で比較すると, どちらの密度が小さいか. 理由を付して答えよ. 必要ならば, 原子量 H:1, C:12, N:14, O:16 を利用してよい.

水という特殊な (irregular ともいえる) 特性をもつ物質と空気との絶妙な連携が, 地球を生命の惑星にしています. これは, 決して誇張ではありません.

- (5) 熱気球のイベントは, 晩秋から早春の寒い時期に行われることが多い. その理由を, 気球に作用する浮力の観点から考察せよ.

2 静水圧による力・力のモーメント [1]

幅 B , 高さ H のドアがあり, あなたはその前にいる. このドアは周囲の壁と隙間なく閉まり, ドアの左端の鉛直軸の周りに回転する. ドアが開く向きは奥側である. 今, ドアが閉まった状態にある. 以下の各問に答えよ.

- (1) ドアの後側に, ドアの高さの $1/3$ まで水が溜まった状態になった. 手前側には水はない. このとき, ドアにかかる力 F を求めよ. ただし, 重力加速度を g , 水の密度を ρ , 大気圧を p_a とする. なお, F の算出は, 座標軸を設定した上で Euler の平衡方程式から始め, 積分を経由すること.

(軸の取り方は一例)

ドアの左端からドアの面に沿って水平右向きに x 軸, 同じ水平面内でドア面から奥に向かって y 軸, ドア下端から鉛直上向きに z 軸をとる.

x 軸と y 軸は重力と垂直な方向にとっているので, $\partial p/\partial x = \partial p/\partial y = 0$.

標準的な状態での大気の密度は水の約 $1/800$ なので, ドアの高さ方向の大気圧の変化は水側に対して無視でき, ドアの後面の圧力は $p' = p_a$ の一定であると近似できる.

一方, ドアの手前側では $\partial p/\partial z = dp/dz = -\rho g$, なので, ドアに接する高さ方向の圧力は $p(z) = \int dp = \int (dp/dz)dz = -\rho g z + C$. 境界条件 $p(H/3) = p_a$ を適用すると, $C = \rho g H/3 + p_a$ なので, $p(z) = \rho g(H/3 - z) + p_a$ である.

この圧力差により, ドアの下端から高さ z にある $dA = B dz$ の微小面積に働く力 dF は, $H/3 \geq z \geq 0$ では $dF = [\rho g(H/3 - z) + p_a - p_a]dA = \rho g(H/3 - z)B dz$, $H \geq z \geq H/3$ では $dF = (p_a - p_a)dA = 0$ である.

ドアにかかる力は, ドアの前面と後面の圧力の差から生じる力の総計なので,

$$\begin{aligned} F &= \int_F dF = \int_0^{\frac{H}{3}} (p - p')B dz = \int_0^{\frac{H}{3}} \rho g \left(\frac{H}{3} - z \right) B dz \\ &= \rho g B \left[\frac{H}{3} z - \frac{1}{2} z^2 \right]_0^{\frac{H}{3}} \\ &= \rho g B \left(\frac{H^2}{9} - \frac{H^2}{18} \right) \\ &= \frac{1}{18} \rho g B H^2 \end{aligned}$$

- (2) (1) の状態において, ドアの回転軸周りに発生する力のモーメント M を求めよ. (1) の結果を利用してよい.

$\partial p/\partial x = 0$ なので, 水平方向の圧力は一様に分布する. したがって, その作用の中心は, いずれの高さにおいても左から $B/2$ の位置, すなわち幅方向の中央である. よって,

$$M = \frac{1}{2} B \times F = \frac{1}{36} \rho g B^2 H^2$$

多重積分を利用するなら, 微小面積 $dA = dx dz$ に作用する力 $dF = (p - p') dx dz$ の, 回転軸周りの腕の長さが x なので (上の考え方との対応が分かるように式変形をしています),

$$\begin{aligned} M &= \int_0^{\frac{H}{3}} \int_0^B (p - p') x dx dz \\ &= \int_0^{\frac{H}{3}} \int_0^B \rho g \left(\frac{H}{3} - z \right) x dx dz \\ &= \frac{1}{2} B^2 \int_0^{\frac{H}{3}} \rho g \left(\frac{H}{3} - z \right) dz \\ &= \frac{1}{2} B \int_0^{\frac{H}{3}} \rho g \left(\frac{H}{3} - z \right) B dz \\ &= \frac{1}{2} B \times F \end{aligned}$$

- (3) $B = 800\text{mm}$, $H = 1800\text{mm}$ として, ドアの右端 (回転軸から水平に B だけ右の位置) を押してドアを開けるために必要な力 P の値を, 単位とともに示せ. 計算には $g \doteq 10\text{m/s}^2$ の近似値を用いてよい. また, 大気圧 p_a と水の密度 ρ には標準的な値を設定せよ. この問題を解くことで, 浸水時にはドアがすぐには開けられなくなることがわかる筈である.

$M - PB = 0$ なので $P = M/B (= F/2)$. 問題 (2) の結果を用いて

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{36} \rho g B H^2 \\
 &= \frac{1}{36} \times 1000 \times 10 \times 0.8 \times 1.8^2 \\
 &= \frac{1}{2^2 \times 3^2} \times (2 \times 5)^3 \times (2 \times 5) \times \left(\frac{4}{5}\right) \times \left(\frac{9}{5}\right)^2 \\
 &= \frac{2^3 \times 5^3 \times 2 \times 5 \times 2^2 \times 3^4}{2^2 \times 3^2 \times 5 \times 5^2} = \frac{2^6 \times 3^4 \times 5^4}{2^2 \times 3^2 \times 5^3} \\
 &= 2^4 \times 3^2 \times 5 = 2^3 \times 3^2 \times (2 \times 5) \\
 &= 8 \times 9 \times 10 \\
 &= 720
 \end{aligned}$$

計算に用いた値は, MKS (SI 単位系) に統一しているので, $P = 720\text{N}$. 大人の男性の体重ほどの力が必要になることがわかる.

小数点がある数値の計算をがむしゃらに進めるのもよいけれど, 上のように式を少し整理すれば, 最後は暗算で計算できます. 急がば回れ, の例です.

それにしても, 解答の一步手前では, 2^3 と 3^2 が対になり, 8,9,10 と連続した整数が並びます. しかも, これらは素数のはじめの 3 つだけでできています. さらに, 組合せと並び方を変えと, $2^4 \times 3^2 \times 5 = 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) = 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 6!$ です.

何とも美しいと思いませんか?

3 静水圧による力・力のモーメント [2]

幅 b の水路に, 長方形の水門が取り付けられている. 今, 水門の左側のみに水路の底から H の高さまで水が入っている. 大気圧を p_a , 水の密度を ρ , 重力加速度を g として以下の問に答えよ. 空気の密度による大気圧の変化は無視してよい.

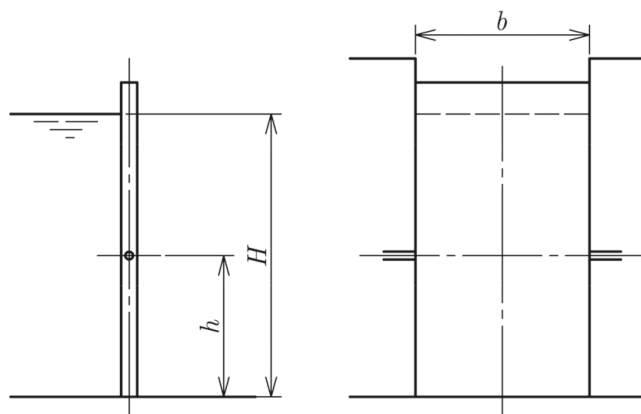


図1 水路の端の水門

- (1) 水門にかかる水平方向の力 F を求めよ.

x 軸と y 軸は重力と垂直な方向にとっているので, $\partial p/\partial x = \partial p/\partial y = 0$.

標準的な状態での大気の密度は水の約 $1/800$ なので, 水門の高さ方向での大気圧の変化は水側に対して無視でき, 水門の右側の圧力は $p' = p_a$ の一定であると近似できる.

一方, 水門の左側では $\partial p/\partial z = dp/dz = -\rho g$ なので, 水門に接する高さ方向の圧力は $p(z) = \int dp = \int (dp/dz) dz = -\rho g z + C$. 境界条件 $p(H) = p_a$ を適用すると, $C = \rho g H + p_a$ なので, $p(z) = \rho g(H - z) + p_a$ である.

得られた解が要件を満たすかどうかを確認し, またどのような特性を持っているかを調べる習慣はとても大切です. 上の式が対象の圧力状態に当てはまるかどうかは, 大気に接している水面の位置である $z = H$ を代入すると $p(H) = \rho g(H - H) + p_a = p_a$ で大気圧になることからわかります. また, z に関する項は $-\rho g z$ で負号がついていますから, 圧力が深さ方向・深くなる向きに直線的に増加することが知られます.

この圧力差により, 水門の底面からの高さ z にある $dA = b dz$ の微小面積に働く力は $dF = [\rho g(H - z) + p_a - p_a] dA = \rho g(H - z) b dz$ である.

水門にかかる力は, 水門の右側と左側の圧力の差から生じる力の総計なので,

$$F = \int_F dF = \int_0^H (p - p') b dz = \int_0^H \rho g(H - z) b dz = \rho g b \left[Hz - \frac{1}{2} z^2 \right]_0^H = \frac{1}{2} \rho g b H^2$$

- (2) 水門に回転軸を取り付け, 自由に回転できるようにするとき, 水門が水圧で勝手に回転しないための回転軸の高さ h を求めよ.

水門の下端まわりの力のモーメントは,

$$M = \int_F z dF = \int_0^H \{\rho g(H - z) b\} z dz$$

この M と (1) の F とつりあう集中荷重で作るモーメントがつりあえばよいので (実際には支点位置の上下で, 静水圧による力のモーメントが相殺する), $M - Fh = 0$ から $h = M/F$ を求めればよい. 計算をすると $h = H/3$ と求まる.

(この位置で水門を支持しておけば, 水門が回転するのを止めるための力のモーメントの付加が不要になるということです.)

4 静水圧によって断面積が変化する容器に生じる力

図 (a) に示す, 上部, 下部とも開いている円筒 (質量は M) を作り, 図 (b) に示すように, 天井に取り付けた秤から丈夫な紐で吊るした. この容器の直径 D の側には, 容器の内側に隙間無くはまり, 摩擦無しで軽く動き, 質量が無視できる底を付けて, その下に別の秤を置いた. そして, 底からの高さが h になるまで水を注いで, 図 (c) の状態にした. 以下の各問に答えよ. ただし, 大気圧を p_a , 水の密度を ρ , 重力加速度の大きさを g とし, 円筒の材料の厚さは無視するものとする.

- (1) 容器中の水の重量 W を求めよ. 水の体積 V は, 直径 D (ϕ は次に続く文字や数値が直径で

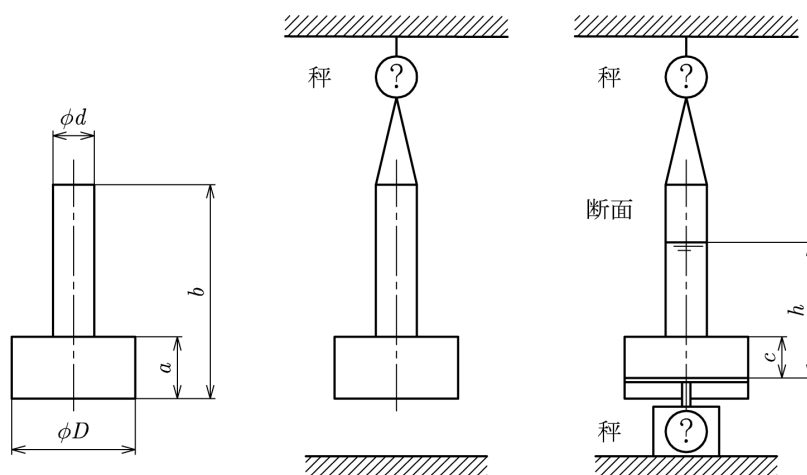


図2 断面積が変化する円筒とピストン

あることを示す寸法補助記号)の部分の高さが c , 直径 d の部分の高さが $h - c$ なので,

$$V = \frac{\pi}{4} \{D^2 c + d^2 (h - c)\}$$

したがって, 求める重量 W は,

$$W = \rho g V = \frac{\pi}{4} \rho g \{D^2 c + d^2 (h - c)\}$$

- (2) 底の下の秤が示す荷重値 P を求めよ. 秤は, 容器の底にかかる鉛直下向きの力を示す. 容器の底の上面と下面には, それぞれ水と大気が接していて, それらによる圧力による力が発生している.

上面の圧力は $p = p_a + \rho g h$, 下面の圧力は $p' = p_a$ なので, 容器の底に働く力, すなわち秤が示す荷重値 P は,

$$P = (p - p') \frac{\pi}{4} D^2 = \frac{\pi}{4} \rho g h D^2$$

- (3) 天井に取り付けた秤が示す荷重値 R を求めよ. 天井の秤は, 容器にかかる力を鉛直下向きを正としてを示す (支持点反力との関係はどのように表現できるか, 考えてごらん) 容器には, 容器自身の質量 M に対する重力 Mg と, 容器の底と向かい合うドーナツ状の面 (面積 $A = \pi(D^2 - d^2)/4$) の圧力による力 F が作用している.

ドーナツ状の面の上面と下面はそれぞれ大気, 水と接していて, それらによる圧力は $p = p_a$, $p' = p_a + \rho g (h - c)$ なので,

$$F = (p' - p) A = \frac{\pi}{4} \rho g (h - c) (D^2 - d^2)$$

したがって,

$$R = Mg - F = Mg - \frac{\pi}{4} \rho g (h - c) (D^2 - d^2)$$

ここで, 発展的な考察として, P と R の合計, つまり天井と床の秤で支えている力を求め

てみると,

$$\begin{aligned} P + R &= \frac{\pi}{4} \rho g h D^2 + Mg - \frac{\pi}{4} \rho g (h - c)(D^2 - d^2) \\ &= Mg + \frac{\pi}{4} \rho g c D^2 + \frac{\pi}{4} \rho g (h - c) d^2 \\ &= Mg + W \end{aligned}$$

で, 容器重量と容器に入れた水の重量になっている.

P が容器の底の上にある水の重量 W よりも大きかったのは, 容器の重量 Mg の一部を, 容器内の水の圧力を介して支えていたことによる.

5 圧力はどのように決まるか [Euler の平衡方程式]

図に示すように, 原点 O に対して, 水平方向に x 軸, 鉛直方向・上向きに y 軸を取り, 細い L 字形の管 (右上の端が大気に開放されていることを示すために, 端部外形線を省略) を, 図のように, 横および縦の部分がそれぞれ x 軸および y 軸と平行になるように置いた. この L 字形の管に, 鉛直な部分での水面が H の高さになるまで常温の水を満たし, 管全体を y 軸を中心に回転させるとき, 以下の各問に答えよ. 大気圧を p_a , 水の密度を ρ , 重力加速度を g とする. また, 図の座標軸は L 字形の管とともに回転するものとする.

※ 「管が細い」とは, ここでは, L 字管の鉛直部分では, 圧力が y だけの関数になると考えてよいことを意味する. 同様に, L 字管の水平部分では, 圧力は x だけの関数として扱える.

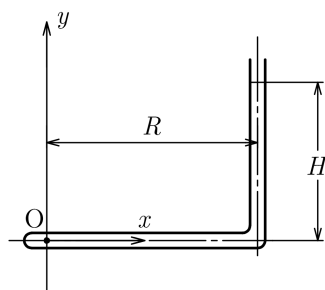


図3 回転する L 字管

- (1) 一定の角速度 ω で回転しているときの, L 字管の鉛直部分の内部の圧力 $p_1(y)$ を式で表せ.

なお, このとき, 管の内部の水は, 全部が液体の状態である.

L 字管の鉛直部分の圧力は g によって鉛直方向にのみ変化するのので, $dp_1/dy = -\rho g$ である. これを高き方向に積分すると

$$\int_{p_1(0)}^{p_1(y)} dp = p_1(y) - p_1(0) = \int_0^y \frac{dp_1}{dy} dy = - \int_0^y \rho g dy = -\rho g y$$

よって,

$$p_1(y) = -\rho g y + p_1(0)$$

ここで, $y = H$ において $p_1(H) = p_a$ であることから, $p_a = -\rho g H + p_1(0)$ の関係が得ら

れ, $p_1(0) = p_a + \rho g H$ であることが知られる. よって,

$$p_1(y) = \rho g H - \rho g y + p_a = \rho g (H - y) + p_a$$

または, $dp_1/dy = -\rho g y$ を不定積分して $p_1(y) = -\rho g y + C_1$. $y = H$ において $p_1 = p_a$ であることから $C_1 = \rho g H + p_a$ であり, $p_1(y) = \rho g (H - y) + p_a$ が得られる.

- (2) (1) のときに, L 字管の水平部分の内部の圧力 $p_2(x)$ を式で表せ.

管の水平部分では, 半径外向きの加速度 $x\omega^2$ が作用しているので, $dp_2/dx = \rho x\omega^2$.

(1) と同様にこの平衡方程式を積分すれば,

$$\int_{p_2(0)}^{p_2(x)} dp = p_2(x) - p_2(0) = \int_0^x \frac{dp_2}{dx} dx = \int_0^x \rho x\omega^2 dx = \frac{1}{2}\rho\omega^2 x^2$$

これより,

$$p_2(x) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 x^2 + p_2(0)$$

$x = R$ において $p_2(R) = \rho g H + p_a$ であることから, $p_2(0) = -(1/2)\rho\omega^2 R^2 + \rho g H + p_a$. よって,

$$p_2(x) = \frac{1}{2}\rho\omega^2 (x^2 - R^2) + \rho g H + p_a$$

この結果から L 字管の水平部において, 圧力は半径方向に x の 2 乗で増加する. 翻れば, 原点 O に向かって急激に低下して, R と ω の値によっては, 原点での圧力が大気圧よりも低下する.

または, $dp_2/dx = \rho x\omega^2$ を不定積分して $p_2(x) = (1/2)\rho\omega^2 x^2 + C_2$. $x = R$ において $p_2 = \rho g H + p_a$ であることから $C_2 = -(1/2)\rho\omega^2 R^2 + \rho g H + p_a$ であり, $p_2(x) = (1/2)\rho\omega^2 (x^2 - R^2) + \rho g H + p_a$ が得られる.

- (3) 角速度 ω を (1) の状態から増加させると, 原点 O の付近で水が沸騰を始めた. このときの角速度 ω_E を求めよ. ただし, 水の密度は温度にかかわらず一定 ρ で, 常温の水は圧力零で沸騰すると近似してよい.

(2) で得られた結果から, $p_2(0) = -(1/2)\rho\omega^2 R^2 + \rho g H + p_a$. この値が零になったので,

$$p_2(0) = -\frac{1}{2}\rho\omega^2 R^2 + \rho g H + p_a = 0$$

ω について解くと,

$$\omega = \frac{1}{R} \sqrt{2(gH + \frac{p_a}{\rho})}$$

大気圧 $p_a = 1013.25 \text{ hPa}$, $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$, $g = 9.8067 \text{ m/s}^2$ および $R = H = 300 \text{ mm} = 0.3 \text{ m}$ とすると,

$$\omega = \frac{1}{0.3} \sqrt{2(9.8067 \times 0.3 + \frac{1013.25 \times 10^2}{1000})} = 48.14 \text{ rad/s} = 7.66 \text{ rev./s}$$

6 静水圧による力・力のモーメント [浮力に関するトリッキーな問題]

図のように, 直方体の容器の側壁のひとつに, 一辺が $2a$ の正方形の穴を, 一組の辺が底面と平行になるように開けて水平な台の上に置き, この穴に直径, 長さともに $2a$ の円柱を, 軸を水平に

して隙間なく詰め込んだ。この容器に円柱の軸から $b (> a)$ の高さまで水を入れるとき、円柱に働く水平方向の力 F_H 、鉛直方向の力 F_V および円柱軸 O の周りの力のモーメント M はいくらか。大気圧を p_a 、水の密度を ρ 、重力加速度を g とする。

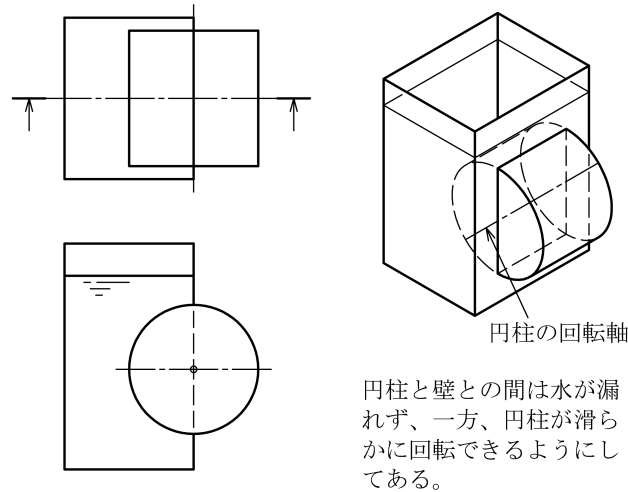


図4 浮力の差により回転する?エンジン

対象の形状が円柱なので、円形である断面（端面）に関する記述は平面極座標を用いると、シンプルになる。

問題の図の円筒中心を原点とし、水平右向きに x 軸、鉛直上向きに y 軸をとると、位相角 θ の角位置にある中心角 $d\theta$ の微小部分について、その位置 (x, y) と弧の長さ ds は、

$$\begin{aligned}x &= a \cos \theta \\y &= a \sin \theta \\ds &= a d\theta\end{aligned}$$

円柱表面の圧力は、大気に接している右側は p_a 、水に浸かっている左側は $p_a + \rho g(b - a \sin \theta)$ なので、この円柱の微小部分の表面に垂直に作用する力 dF は、円柱の右半分では $p_a(2a)ad\theta = 2p_a a^2 d\theta$ 、左半分では同様に $2\{p_a + \rho g(b - a \sin \theta)\} a^2 d\theta$ である。

F_H と F_V は、 dF の水平方向成分 $dF \cos \theta$ と鉛直方向成分 $dF \sin \theta$ をそれぞれ円柱の表面につ

いて積分すると得られる.

$$\begin{aligned}
 F_H &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta \, dF + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos \theta \, dF \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2p_a a^2 \cos \theta \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2\{p_a + \rho g(b - a \sin \theta)\} a^2 \cos \theta \, d\theta \\
 F_V &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \theta \, dF + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin \theta \, dF \\
 &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2p_a a^2 \sin \theta \, d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} 2\{p_a + \rho g(b - a \sin \theta)\} a^2 \sin \theta \, d\theta
 \end{aligned}$$

($\int_0^{2\pi} \cos \theta \, d\theta = \int_0^{2\pi} \sin \theta \, d\theta = 0$ なので, 上の積分の被積分関数内の定数項は一周の積分で相殺されることを利用すると, 計算が少し楽になります.)

モーメント M は, dF が常に半径方向中心向で腕の長さが 0 であることから, $dM = 0$ であり, $M = \int dM = 0$ が自明である.

円筒の水に浸かっている側の浮力は空気の側の浮力よりも大きいから, この円筒は水の浮力によって時計回りに回り続ける???, 第一種の永久機関ができる???, というようなことは起こらないことがわかります.

7 静水圧に関する問題

図 (a) に示す, シリンダの上部に細管を追加した開放管とピストンとを製作し, (b) の断面図のようにピストンをシリンダにはめ込んで容器とした. (c) には, (b) の状態を手前 90° の範囲を断面にして示している. 細管の内部はシリンダ内部とつながっていて, 上部は大気開放されている. また, シリンダに対してピストンは隙間なくはまり, 摩擦無く移動する. これらの中心線を鉛直に置いてシリンダ側を固定するとき, 以下の各問に答えよ. ただし, 細管は十分に長く (図 (a),(b) の細管の途中で省略記号があることに注意), 水が細管の上部から溢れることはない. 重力加速度を g , 水の密度を ρ , 大気圧を p_a とする.

- (1) (b) の状態で, 細管の上部から容器内に $h/2$ の高さまで水を入れた. 容器内の水の重量 W_1 と, ピストンが静止するために鉛直上向きに加える力 F_1 とを求めよ.

シリンダ内の水の体積 V は, ピストンの面積 $A = \pi D^2/4$ に水柱の高さ $h/2$ (z 軸方向の長さ) を乗じた $V = \pi D^2 h/8$ なので, その重量は $W_1 = \rho V g = \rho(\pi D^2 h/8)g$.

(軸の取り方は一例)

ピストン上面中央に原点をとり, 水平面内に x 軸と y 軸, 鉛直上向きに z 軸を取る.

標準的な状態での大気の密度は水の約 $1/800$ なので, 高さ方向の大気圧の変化は水側に対して無視でき, シリンダまたは細管内の水面とピストンの下面の圧力はともに $p' = p_a$ で同じであると近似できる.

一方, 水が存在する部分については x 軸と y 軸は重力と垂直な方向にとっているの

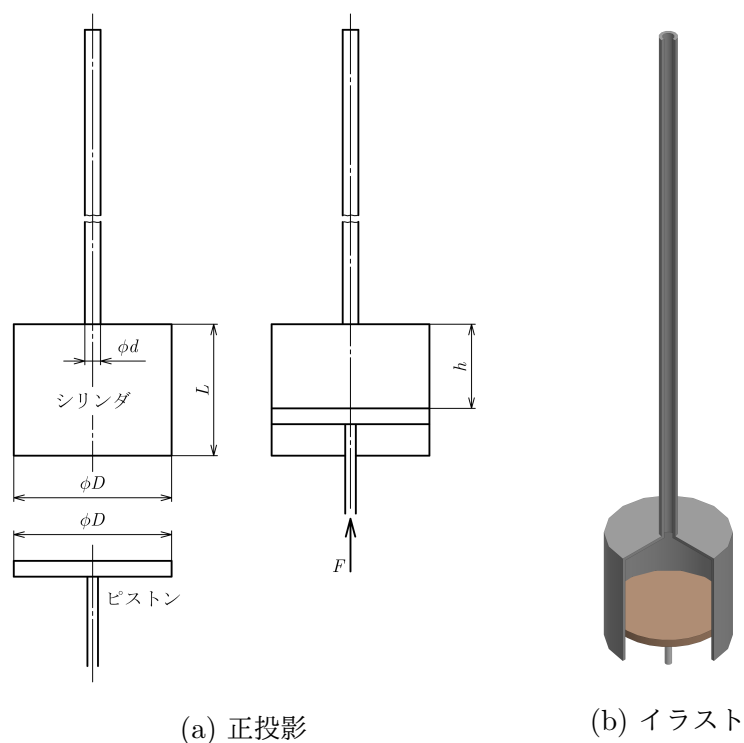


図5 細管をつけた円筒容器

$\partial p/\partial x = \partial p/\partial y = 0$, z 軸方向については $\partial p/\partial z = dp/dz = -\rho g$ であることから, シリンダ・細管内の水柱内の圧力は $p(z) = \int dp = \int (dp/dz) dz = -\rho g z + C$. 水柱表面のピストン上面からの高さ (z 軸方向の長さ) を H とおき, 境界条件 $p(H) = p_a$ を適用すると, $C = \rho g H + p_a$ なので, $p = \rho g H + p_a$ であり, $H = h/2$ のとき, $p = \rho g h/2 + p_a$ である.

ピストンの上面は上記の p , 下面は大気圧 p_a なので, ピストンにかかる力 $F'_1 = (p_a - p)A = \{p_a - (\rho g h/2 + p_a)\}(\pi D^2/4)h/2 = -\rho g \pi D^2 h/8$ (鉛直下向き). ピストンには, これに釣りあう力を加えなくてはならないので, $F_1 = \rho g \pi D^2 h/8$ (鉛直上向き).

大気圧 p_a は, ピストンの上面と下面に (近似的に) 同じ大きさで作用して相殺するので, F_1 には含まれません. このことは, 以下の F_2 や F_3 についても同じです.

- (2) 細管の上部から, (1) で入れたのと同じ量の水を容器内に追加した. 容器内の水の重量 W_2 と, ピストンが静止するために鉛直上向きに加える力 F_2 とを求めよ.

水を (1) と同じ量だけ追加したので, 水の重量は $W_2 = 2W_1 = \rho(\pi D^2 h/4)g$.

また, z 軸方向の水位の上昇も (1) と同じく $h/2$ なので, 水面はシリンダと細管の継目の高さにある. (1) で求めた圧力において $H = h$ なので, ピストン上面の圧力は $p = \rho g h + p_a$. したがって, $F'_2 = (p_a - p)A = \{p_a - (\rho g h + p_a)\}(\pi D^2/4)h = -\rho g \pi D^2 h/4 = 2(-F'_1)$. よって, $F_2 = \rho g \pi D^2 h/4$.

- (3) (2) の状態からピストンを上方に $h/2$ だけ移動させた。ピストンが静止するように鉛直上向きに加える力 F_3 を求めよ。

(2) において、水面はシリンダと細管との継目の位置にあった。この状態からシリンダを $h/2$ だけ上昇させたので、(2) で追加した体積 $\pi D^2 h/8$ だけの水が細管内に移る。細管下端から水面までの高さを L とおくと、 $\pi d^2 L/4 = \pi D^2 h/8$ から $L = (D/d)^2 h/2$ 。したがって、ピストン上面に対して水面の高さは $H = h/2 + L = \{1 + (D/d)^2\}h/2$ 。ピストン上面の圧力は $p = \rho g H = \rho g \{1 + (D/d)^2\}h/2 + p_a$ で、ピストン上下面の圧力差によりピストンにかかる力は

$$\begin{aligned} F'_3 &= (p_a - p)A = p_a - (p_a + \rho g(1 + \frac{D}{d})^2 h/2)A \\ &= \rho g \left\{ 1 + \left(\frac{D}{d}\right)^2 \right\} \frac{h}{2} \frac{\pi D^2}{4} \\ &= \frac{1}{8} \left\{ 1 + \left(\frac{D}{d}\right)^2 \right\} \pi \rho g D^2 h \end{aligned}$$

- (4) $\pi D^2/4 = 1.00 \times 10^4 \text{mm}^2$, $d = D/10$, $h = 100 \text{mm}$ のとき、(2) の W_2 と F_2 , および (3) の F_3 とを求めよ。解答には、単位を明記すること。重力加速度には $g = 10 \text{m/s}^2$ の近似値を用いてよい。

諸量を、単位を揃えて、(2) と (3) で求めた W_2 , F_2 および F_3 に代入すればよい。

$A = \pi D^2/4 = 1.00 \times 10^4 \text{mm}^2 = 1.00 \times 10^4 \times 10^{-6} \text{m}^2 = 1.00 \times 10^{-2} \text{m}^2$, $h = 100 \text{mm} = 1.00 \times 10^{-1} \text{m}$, $\rho = 1000 \text{kg/m}^3$ で、 $g = 10 \text{m/s}^2$ を用いるから、

$$\begin{aligned} W_2 &= \rho \frac{\pi D^2}{4} h g = 1000 \times 1.00 \times 10^{-2} \times 1.00 \times 10^{-1} \times 10 \\ &= 1.00 \times 10^{3-2-1+1} = 1.00 \times 10 \text{ [N]} \\ F_2 &= \rho \frac{\pi D^2}{4} h g = 1000 \times 1.00 \times 10^{-2} \times 1.00 \times 10^{-1} \times 10 \\ &= 1.00 \times 10^{3-2-1+1} = 1.00 \times 10 \text{ [N]} \\ F_3 &= \frac{1}{8} \left\{ 1 + \left(\frac{D}{d}\right)^2 \right\} \pi \rho g D^2 h \\ &= \frac{1}{2} \rho \left\{ 1 + \left(\frac{D}{d}\right)^2 \right\} \frac{\pi D^2}{4} h g \\ &= \frac{1}{2} \times 1000 \times (1 + 10^2) \times 1.00 \times 10^{-2} \times 1.00 \times 10^{-1} \times 10 \\ &= \frac{1}{2} \times 101 \times 10^{3-2-1+1} \\ &= \frac{1}{2} \times 101 \times 10 \\ &= 505 \text{ [N]} \end{aligned}$$

容器の中の水は 1 リットルです。牛乳パックを思い浮かべましょう。質量は 1kg で重量は 10N。皆さんが日常で使う単位で言うと 1kg 重です。その水を支えるのに、女性の体重ほどの力が必要になるのが、不思議で面白いと思いませんか。

(5) F_2 と F_3 の差が、どのようなしくみで生じたかを考察せよ。

ピストン上面の圧力を増加させる仕組みを、それを受ける面積とは別に工夫をしたからです。ピストンと細管の断面積を変えていることによります。水の重量と F_3 との差はどのようにして支えられているか考えてもらいたい。講義中に配布した演習問題に類似のものがあります。WEB ページに掲載の解説を、もう一度よく読むとよいでしょう。

筒の断面積が変化しないときには、細くて長い筒と太くて短い筒にそれぞれ同じ量の水をいれるとき、水面の高さは異なりますが、底面にかかる力は同じです。計算をして確かめてみましょう。

8 水を堰き止めた傾斜平板に作用する力

断面が幅 B の矩形の水路がある。その水路に、幅 B の矩形の平板を、図のように θ で傾けて水を堰き止める。平板の左側にだけ深さ D だけ水が入っているとき、平板に作用する力 $\mathbf{F} = (F_x \ F_y)$ を求めよ。ただし、平板下端を原点とし、水平右向きを x 軸、鉛直上向きを y 軸とする。

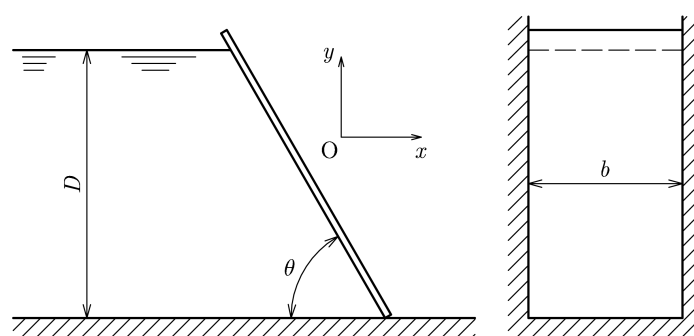


図6 傾斜した平板による水の堰き止め

大気圧に相対的な水中の静圧は $p(y) = \rho g(D - y)$ ($y = D$ を代入すると $p(D) = 0$ で、大気圧と同じになることが確認できます)。平板の水がある側の面の単位法線ベクトルは $\mathbf{n} = (-\sin \theta \ -\cos \theta) = -\mathbf{i} \sin \theta - \mathbf{j} \cos \theta$, $y = y' \sin \theta$ なので、 y' 軸の水面の座標は $D / \sin \theta$, 平板に

沿う微小長さ $dy = dy' \sin \theta$, さらに微小面積は $dA = B dy'$. したがって,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F} &= \int_0^{D/\sin \theta} (-\mathbf{n}) p(y') dA \\
 &= \int_0^{D/\sin \theta} (-\mathbf{n}) \rho g (D - y' \sin \theta) B dy' \\
 &= -\rho g \mathbf{n} B \left[D y' - \frac{1}{2} y'^2 \sin \theta \right]_0^{D/\sin \theta} \\
 &= -\rho g \mathbf{n} B \left(\frac{D^2}{\sin \theta} - \frac{1}{2} \frac{D^2}{\sin^2 \theta} \sin \theta \right) \\
 &= -\rho g \mathbf{n} \frac{BD^2}{2 \sin \theta} \\
 &= -\rho g (-\mathbf{i} \sin \theta - \mathbf{j} \cos \theta) \frac{BD^2}{2 \sin \theta} \\
 &= \rho g \frac{BD^2}{2} \mathbf{i} + \rho g \frac{BD^2 \cos \theta}{2 \sin \theta} \mathbf{j} \\
 &= \frac{1}{2} \rho g B D^2 \mathbf{i} + \frac{1}{2} \rho g B D^2 \cot \theta \mathbf{j}
 \end{aligned}$$

$\mathbf{F}$ の x 軸方向成分には, θ が関係しません. どのような仕組みでこのような結果になるのか, 式および物理的意味の両面から考察しましょう.

9 水を堰き止めた円柱に作用する力

断面が幅 B の矩形の水路がある. その水路に, 直径 D , 長さ B の円柱を, 図のように, 長さ方向を水路の幅方向にして置いて水を堰き止める. 円柱の左側と右側の水位が, それぞれ D , $D/2$ であるとき, 円柱に作用する力 $\mathbf{F}$ を求めよ. ただし, 円柱の中心を原点とし, 水平右向きを x 軸, 鉛直上向きを y 軸とする.

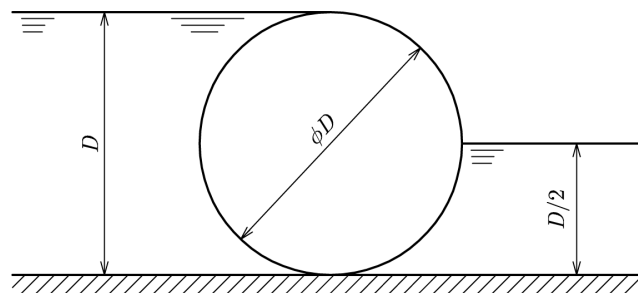


図 7 横倒しにした円柱による水の堰き止め

正の x 軸を 0° とし, 半時計回りを正の向きとする角度 θ をとると, 大気圧に相対的な圧力は, 円柱の左側では $p_l = \rho g (D/2)(1 - \sin \theta)$ ($\pi/2 \leq \theta \leq 3\pi/2$), 右側では $p_r = -\rho g (D/2) \sin \theta$ ($3\pi/2 \leq \theta \leq 2\pi$) である. これらの静水圧が作用する円柱表面の微小面積は, $dA = B(D/2)d\theta$, その外向き単位法線ベクトルは, $\mathbf{n} = (\cos \theta \sin \theta)$ なので,

$$\mathbf{F} = \int_{\pi/2}^{3\pi/2} p_l(-\mathbf{n})dA + \int_{3\pi/2}^{2\pi} p_r(-\mathbf{n})dA$$

と表されますが、以下のように

$$F_x = \rho g \frac{D}{2} DB - \rho g \frac{D}{4} \frac{D}{2} B = \frac{3}{8} \rho g B D^2$$

$$F_y = \rho g \frac{\pi D^2}{4} B + \rho g \frac{\pi D^2}{8} B = \frac{3}{8} \pi \rho g B D^2$$

と積分をしなくてもいきなり答えを知ることができます。これらの式は、どのように考えれば立てられるのか、考察してみなさい。円柱の左側だけに水がある状態では、 $F_x = \rho g B D^2 / 2$ で、前の傾斜平板の問題の F_x と同じであることがヒントになります。

10 容器内の圧力と側孔からの流れ

水平な断面での面積が A の水槽に深さ H まで水を入れた。大気圧 p_a は高さに関係なく、水の密度を ρ 、重力加速度を g とする。以下の各問に答えよ。

- (1) 図 (a) のように水槽側壁の高さ $H/2$ の位置に、小さな穴を開けた。穴の断面積は、水槽の断面積に対して十分に小さいものとして、穴から水が噴出す速さ v を求めよ。
- (2) 図 (a) の水槽にぴったりとはまる蓋をつくった。この蓋は軽くて質量が無視でき、水槽にはめると水槽内壁との間の摩擦がなくて上下に滑らかに動き、しかし水は漏れないものとする。この蓋を図 (b) のように水面に置き、その上に質量 M のおもりを載せた。 M が水槽に入っている水の質量と等しいとき、水槽の側壁から噴出す水の流速 v' を求めよ。
- (3) 図 (c) のように、(2) のおもりをどけて水槽側壁の穴を塞いだ。それから、蓋に小さい穴を開けて、図 (b) に示すように、穴に細長い管を立てた。この管も軽く質量が無視できるものとする。蓋を水面においてから管に水を蓋から H の高さまで入れると、蓋が持ち上がろうとしたので、動かないように大きさ F の力で蓋を鉛直下向きに押した。 F の大きさを求めよ。

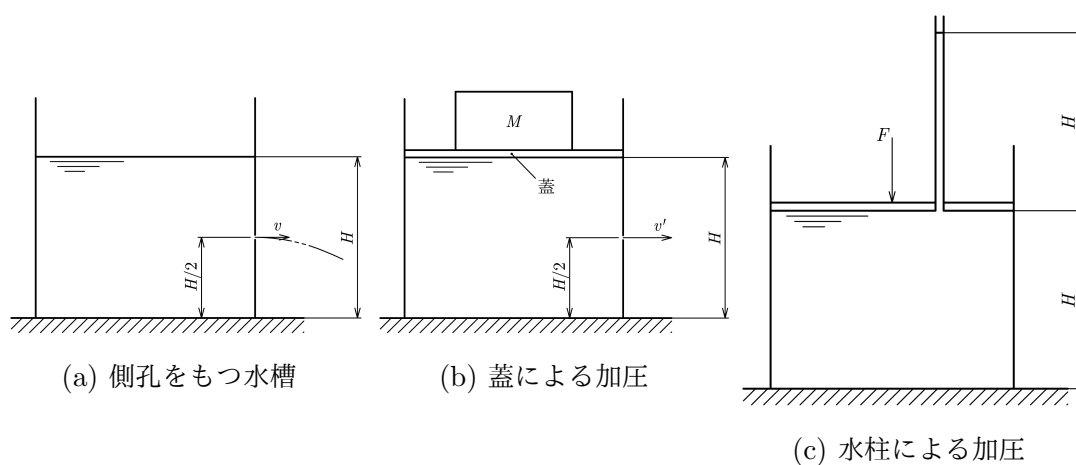


図 8 細管をつけた円筒容器

11 容器からの噴流

図に示す深さ H だけ水をいれた容器において、液面から h だけ下方の側面に穴を開け、水を水平に噴出させる。穴の断面積は容器の横断面積に比べて十分に小さく、穴付近以外では水は静止しているとみなせる。以下の各問に答えよ。ただし、大気圧を p_a 、水の密度を ρ 、重力加速度の大きさを g とする。

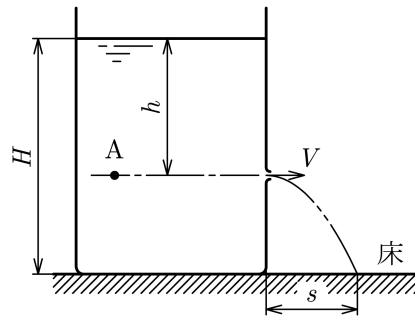


図9 容器の側孔からの噴流

- (1) 穴と同じ高さにある A 点の静水圧 p_a はいくらか。
- (2) 穴から噴出する水の流速 V を求めよ。
- (3) 穴から噴出した水は、水の微小部分は、それぞれが容器の端から水平に初速 V で投げられた質点と同じ運動をする。すなわち、重力により鉛直下向きの速度成分を増しながら、放物線を描く。水が床にあたる点と穴との水平距離 s を求めよ。
- (4) 水を容器からできるだけ遠くまで飛ばそうとするとき、穴はどのような高さに開ければよい。 (3) の結果から考察せよ。

12 サイホンの原理を利用した流体の輸送

「サイホンの原理」を利用して、図に示すように、左側の池から障害物を乗り越え右側の低地まで、外部からはエネルギーを供給しないで送水を行おうと考えた。上流の池の水面と障害物を乗り越えるホースの中心線の落差を H 、水面とホースの出水側の中心線の落差を D とする。以下の各問に答えよ。ただし、ホースは細く、取水側から出水側まで内部の圧力にかかわらず断面積は一定であり、ホースとの摩擦による流れのエネルギー損失は無視できるものとする。また、池の水面の面積は大きく、送水時の水面の降下の速さは考えなくてよい。大気圧を $p_a = 1000\text{hPa}$ 、水の密度を $\rho = 1000\text{kg/m}^3$ とし、重力加速度には $g \doteq 10\text{m/s}^2$ の近似値を用いよ。

- (1) ホース内に水を満たし、両端をふさいだ状態で図 1 の状態に置き、ホース端を開放したら、送水が始まった。池の水面からホースの出口まで流線はつながっている。池の水面の高さを基準にし、ホース出口での流速を V とするとき、水槽水面とホース出口の流れの間で成り立つ関係を示せ。

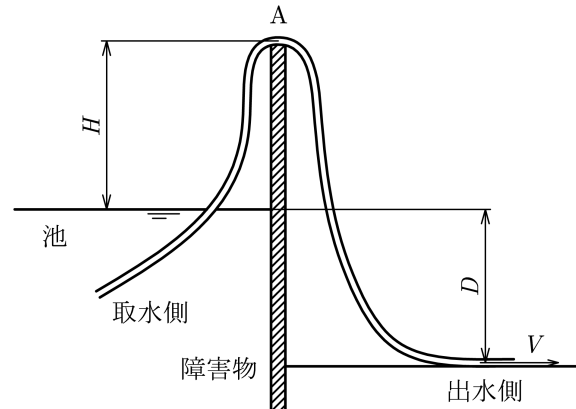


図 10 Siphon の原理を利用した流体の移送

非圧縮性の流れが定常で損失がないとみなせるときには、次式のように流線に沿ってエネルギーが保存される（定常ベルヌーイの式．この式の右辺値は、一般的には流線ごとに異なることも理解しておくこと．因みに WEB 上の popular description の多くは、この式が成り立つ条件を考えずに、強引に辻褄を合わせようとするところから生じています）．

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + p + \rho gh = \text{const.}$$

さて、今、対象としている、池から低地まで、流線はどのようにつながっているのだろうか．ホースの中は入口から出口までつながっているのが明らかだが、ホースの入り口より前はどこから始まっているのだろうか．

ホースに水が吸い込まれると、池の中の水はすべてつながっているのだから、池の中のすべての水が、じわじわとホース口に近づいていく．つまり、ホース内の流線は池の中の任意の位置につながっている．ホース口から離れるほど流速は遅く、遠い位置では気が遠くなるほど遅い、つまり静止しているとみなしてよいほどになる．

任意の位置、すなわちどこでもよいのなら、できるだけ流れの条件が簡単な位置の条件を利用したい．これには、ホースから遠く、流速が零となる場所をとればよい．流速が零のところは、問題 1 の水門で調べたように、 $p + \rho gh$ は一定である．

圧力が p_a である水面をとり、ホース出口を高さの基準とすれば、池の水面とホース出口の間の流線について成り立つエネルギーの保存は、

$$p_a + \rho g D = \frac{1}{2}\rho V^2 + p_a$$

と表せる．

- (2) ホースが障害物を乗り越える位置 A での流れの静圧 p を求めよ．
池の水面と位置 A の間でのエネルギー保存は、

$$p_a = \frac{1}{2}\rho V^2 + p + \rho g H$$

問 1 から $V = \sqrt{2gD}$ なので,

$$\begin{aligned} p &= p_a - \frac{1}{2}\rho V^2 - \rho g H \\ &= p_a - \rho g(D + H) \end{aligned}$$

ホース出口でのエネルギー保存を書いても,

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + p + \rho g(D + H) = \frac{1}{2}\rho V^2 + p_a$$

なので, $p = p_a - \rho g(D + H)$.

- (3) この方法で送水するとき, 乗り越えられる障害物の高さの限界 H_{lim} を求めよ. 流れの圧力が蒸気圧 (常温では概ね零) になると, 水は沸騰し流れが途切れてしまうので, $p = 0$ のときに, 限界 H_{lim} を与えるから,

$$H_{lim} = \frac{p_a}{\rho g} - D$$

H_{lim} は, 水面とホース出口の落差で決まることがわかる. つまり, D を大きくすると, 乗り越えられる高さが低くなる. これはどうしてだろうか.

- (4) [発展的問題] D の高さを変えずに H_{lim} を増加させるには, ホースをどのように変えればよいか, 理由を含めて答えよ.

問 2 から知られるように, 問 3 の上限は, 位置 A とホース出口で流速 V が同じであることを前提にしている. 位置 A での V の大きさを変えれば, 以下のように p を変化させることができる.

$$\frac{1}{2}\rho V'^2 + p + \rho g(D + H) = \frac{1}{2}\rho V^2 + p_a$$

から,

$$\begin{aligned} H_{lim} &= \frac{p_a}{\rho g} - D + \frac{V^2}{2g} - \frac{V'^2}{2g} \\ &= \frac{p_a}{\rho g} - \frac{V'^2}{2g} \quad (\because p \approx 0, V = \sqrt{2gD}) \end{aligned}$$

連続の式から, 位置 A と出口でのホースの断面積をそれぞれ a' , a とすると, $V'a' = Va$ なので, 流速を変えるには, ホースの断面積を変えればよい.

例えば, 位置 A の前後でホースの直径を 2 倍にすると, 断面積は 4 倍になるので, 流速は $V' = V/4$. そうすると,

$$\frac{V'^2}{2g} = \frac{(V/4)^2}{2g} = \frac{1}{16} \frac{V^2}{2g} = \frac{D}{16}$$

$$H_{lim} = \frac{p_a}{\rho g} - \frac{D}{16}$$

で, $15D/16 (= 0.9375D)$ も H_{lim} を増やすことができる.

ただし, 実際には, 流れの減速では, 境界層が厚くなり, 流れが壁面からはく離することが多く, 上記のような効果は得にくい (増速に対して, 上手な減速は難しい). 注意深い計画と高度な設計が必要になる.

「吸い上げポンプでは 10m 以上には水をくみ上げられない」は小学校の理科の知識。

問題解答の圧力零は、正しくは、水の蒸気圧。液体は、圧力が蒸気圧 p_v 以下になると常温でも沸騰を起こす。ただし、生活温度範囲において水の蒸気圧は 10~30 hPa 程度なので、実用的には第一次近似として圧力零を使用してよい。

動圧増加に基因する圧力低下で発生する常温沸騰現象をキャビテーション **cavitation** という。工業設計力学では扱わないが、高速艇や発電、宇宙関連機器などの高レベルの機能デザインにおいては不可欠な知識である。

13 流れの連続性と物体が流れに及ぼす力 [内部流れ]

[内部流れ] 右の図に示すように、平行なダクトの中に底面に接触させてブロックを置いたところ、一様流速 V 、圧力 p_1 の上流側の流れが、ブロックの下流では、 v に増速した領域と $V/2$ に減速した領域とに分かれ、圧力はダクトの断面で一様に p_2 となった。ダクト、ブロックおよび流れは二次元的で、紙面に垂直な方向の寸法を 1 とする。

- (1) 増速した側の流速 v を求めよ。

ダクトの上下壁と破線で示されたブロックの上・下流の断面からなる領域を検査体積とする。

流れ場の上下はダクト壁で流れの出入りはないので、左からの流入流量はすべて右から流出する。したがって、

$$\rho V b \times 1 - \rho \left(v \frac{b}{2} + \frac{V}{2} \frac{b}{2} \right) \times 1 = \rho V b - \rho \frac{v b}{2} - \rho v \frac{b}{4} = \rho \frac{3}{4} V b - \rho \frac{1}{2} v b = 0$$

から

$$v = \frac{3}{4} V b \times \frac{2}{b} = \frac{3}{2} V$$

- (2) p_2 はどれほどになるか考察して推定せよ。

右の境界から流出する流れのうち、流速が増加した部分は、ブロックから力を受けて減速した、上流では $b/4$ の幅の部分の流れが、ダクトの $b/2$ に広がったために、残りの部分をズルのように狭めたことにより、増速したものである。

したがって、この増速した部分では、流線に沿って流れのエネルギーが保存されているので、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho V^2 + p_1 &= \frac{1}{2} \rho \left(\frac{3V}{2} \right)^2 + p_2 \\ p_2 &= p_1 + \frac{1}{2} \rho V^2 - \frac{1}{2} \rho \frac{9}{4} V^2 \\ &= p_1 - \frac{5}{8} \rho V^2 \end{aligned}$$

- (3) ブロックの上・下流断面（ともに破線で示す）の間での流れの変化と、ブロックが流れに及ぼす力のダクト方向の成分 F との関係を式で表せ。

上下壁からの流れの出入りはないので、運動量の出入りは流れ方向のみである。また、壁面には摩擦力は働かないので、流れ方向に作用する力は、境界での圧力と F 。したがって、運動量の出入りと力との関係は、

$$M_{out} - M_{in} = F + p_1 b \times 1 - p_2 b \times 1$$

$$\rho v^2 \frac{b}{2} \times 1 + \rho \left(\frac{V}{2}\right)^2 \frac{b}{2} \times 1 - \rho V^2 b \times 1 = F - p_2 b \times 1 + p_1 b \times 1$$

(4) (3) の式を解いて, F を求めよ.

$$F = \rho \left(\frac{3}{2}V\right)^2 \frac{b}{2} - \frac{7}{8}\rho V^2 b + (p_2 - p_1)b = \rho \left(\frac{9}{8} - \frac{7}{8}\right)V^2 b + (p_2 - p_1)b = \frac{1}{4}\rho V^2 b + (p_2 - p_1)b$$

(5) ブロック下流の流れがさらに下流で一樣流速 V に戻った. そこでの圧力 p_3 を求めよ.

ブロックの下流断面と, さらに下流の流速が一樣になった断面とで運動量の式を立てると,

$$\rho V^2 b - \rho \left(\frac{3V}{2}\right)^2 \frac{b}{2} - \rho \left(\frac{1}{2}V\right)^2 \frac{b}{2} = (p_2 - p_3)b$$

これを p_3 について解いて,

$$p_3 = p_2 - \rho \left(1 - \frac{9}{8} - \frac{1}{8}\right)V^2 b = p_2 - \frac{1}{4}\rho V^2 b$$

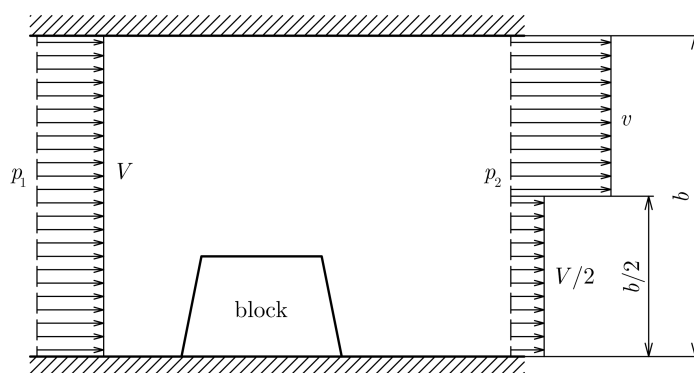


図 11 ダクト内に置かれたブロック

14 流れの連続性と物体が流れに及ぼす力 [外部流れ]

広い空間で, 図に示すように, 流速 V の一樣な流れの中に, 直径 d の長い円柱を, 軸を流れに対して垂直にして置いた. このとき, 円柱下流の流速は, 円柱の直径の範囲で流速零から V まで直線的に変化し, その外側の領域では V であった. また, 流れは互いに平行であった. 円柱の単位長さあたりに働く抗力 D を求めよ. 周囲の圧力を p_a , 流体の密度を ρ , 重力加速度を g とする.

図の破線のように矩形の検査体積をとる. 左右の境界では流速分布が与えられている. 紙面の上下方向の境界は円柱から十分に離れた位置 (円柱の直径よりも十分に大きい距離) にとる. このように検査体積をとるのは, 円柱による流体への作用のほぼ全部がこの検査体積に含まれるようにするためである. これにより, 境界での流れと圧力の様子が簡単になり, 流れを扱いやすくなる. この矩形領域の縦 (y 方向) の大きさを a とし, 検査体積の紙面に垂直な方向の大きさを 1 とする. この検査体積について, 単位時間 ($\Delta t = 1$) について, 検査体積への運動量の出入りと, 検査体積内の流体に作用する力 F の力積を求める.

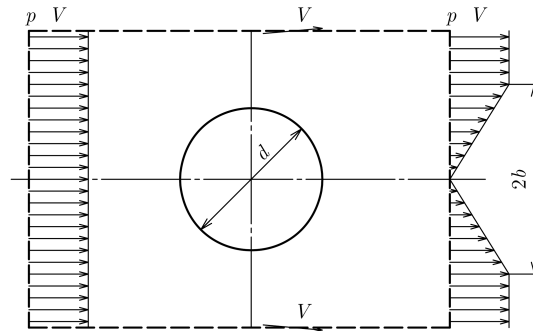


図 12 流れ場にとった検査体積とその境界の流れ

まず検査体積の左側から流入する運動量は $M_{in} = \rho V^2 a$ である, 検査体積の右側から流出する運動量 M_{out} は円柱後流 (円柱の下流にある速さが遅い領域) の速度欠損を考慮して

$$\begin{aligned}
 M_{out} &= \rho V^2 (a - 2b) + \rho \int_{-b}^b v(y)^2 dy \\
 &= \rho V^2 (a - 2b) + 2\rho \int_0^b \left(\frac{V}{b}y\right)^2 dy \\
 &= \rho V^2 (a - 2b) + 2\rho \frac{V^2}{b^2} \left[\frac{1}{3}y^3\right]_0^b \\
 &= \rho V^2 (a - 2b) + 2\rho \frac{V^2}{b^2} \frac{b^3}{3} \\
 &= \rho V^2 (a - 2b) + \frac{2}{3}\rho V^2 b \\
 &= \rho V^2 \left(a - \frac{4}{3}b\right)
 \end{aligned}$$

ところで, 検査体積に左側の境界から入った流れ (質量流量) $Q_{in} = \rho V a$ であるのに対して, 右側の境界から出た流れは

$$\begin{aligned}
 Q_{out} &= \rho(a - 2b)V + \int_{-b}^b v(y) dy \\
 &= \rho(a - 2b)V + 2 \int_0^b \left\{\frac{V}{b}y\right\} dy \\
 &= \rho V(a - 2b) + 2\rho \frac{V}{b} \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^b \\
 &= \rho V a - \rho V b
 \end{aligned}$$

なので, $Q_{in} > Q_{out}$.

非圧縮流れの連続性から, 検査体積から流出した体積と流入した流れは等しいので, 上記の差 $\Delta Q = Q_{in} - Q_{out} = \rho V b$ は, 検査体積の上と下の辺から流出したことになる (横からはみ出した, ということです).

側方の境界は円柱から離れているので, そこでの流れは, 流速が概ね V で入口の流れ方向にほぼ平行と考えてよいだろう (円柱の流れへの作用は検査体積に全て含まれているので, その外側の流れは左側の一様流入流れと同じ). すると, 側方から流出した運動量は $M'_{out} = (\rho \Delta Q)V = \rho V^2 b$ と見積もることができる.

また、広い空間に開放された流れなので、周辺の圧力はすべて p_a で同じである。

これらをまとめて紙面の左右方向での運動量の変化と抗力 D 、検査体積の境界に作用する圧力の関係を書くと次のようになる（式の両辺には単位時間 $1 = \Delta t$ が乗ぜられていることを忘れないように。また、奥行方向には単位長さの厚みがとられています）。

$$M_{out} + M'_{out} - M_{in} = D + p_a a - p_a a$$

から、

$$\begin{aligned} D &= M_{out} + M'_{out} - M_{in} \\ &= \rho V^2 \left(a - \frac{4}{3}b\right) + \rho V^2 b - \rho V^2 a \\ &= -\frac{1}{3}\rho V^2 b \end{aligned}$$

と求まります。計算結果の負号は、 D が左向き（ x 軸の負の向き）に作用していることを表しています。力学的作用をベクトル量である運動量の式で表して扱ったことによります。

15 ベルヌーイの式に関するトリッキーな問題

図のように、水面の高さが異なるふたつの水槽 A と B との間を流路でつなぐと、落差により流路を通して A から B に水が流れる。ふたつの水槽の横断面積は大きく、流路を通る水の移動による水面の降下の速さは無視できるものとする。このとき、ふたつの水槽の水面の間でベルヌーイの式を立てると、どちらでも水面の流速は零、つまり流れの動圧が零、圧力は大気圧 p_a で同じなので、

$$0 + p_a + \rho g h_A = 0 + p_a + \rho g h_B$$

から $h_A = h_B$ となってしまう??? いったい何を間違えているのだろうか？

この問題で提示されているベルヌーイの式は、定常、非圧縮について、損失がなくつながった流れができていない場合に成り立つものである。

ふたつの水槽をつなぐ流路を通る流れは、上流側の水槽の水面から徐々に加速したもので、ふたつの流路の出口付近までは繋がっているが、水槽 B に入ったあとは、徐々に減速して圧力を増加させるのではなく、不規則に発生した渦の粘性によりエネルギーを消散させてしまう。つまり、流路出口の流れと水槽 B の水面とは流線が繋がっていないのに、ベルヌーイの式を適用したのが間違いの原因である。

16 流れの偏向と流体力

図に示すように、ホースから出た速さ V 、断面積 A の一様で水平な流れを、中心角が 90° の円筒の内面を利用して押し返す。円筒に当たる流れの中心線と円筒断面の中心線とが一致しているので流れは手前と奥に同じ流量に分かれ、円筒の手前と奥の端から、円筒面に沿って速さ v 、断面積 a で一様に流出した。流れは紙面に垂直な方向に高さを変えないものとして、以下の各問に答えよ。水の密度を ρ とする。

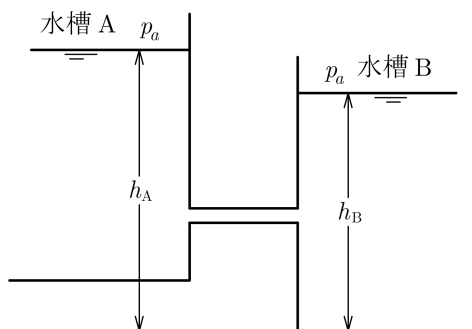


図 13 流路で連結したふたつの水槽

- (1) v を V を用いて表せ.

流れに対して仕事はなされず，摩擦も無視できるので，流線に沿ってエネルギーが保存されている．したがって，

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + p_a = \frac{1}{2}\rho v^2 + p_a$$

より， $v = V$.

- (2) a を A を用いて表せ.

流れの連続性は $VA = v(2a)$ と表せる．問 1 の $v = V$ を代入することで， $a = A/2$ であることがわかる．

- (3) 円筒が動かないために流れ方向に加える力 F の大きさを求めよ．

流れの領域を大きく囲む検査体積をとり，紙面の左右方向を x 軸，上下方向を y 軸とする．それぞれの方向について，運動量の変化と力積の関係は， $\mathbf{F} = (F_x, F_y)$ として，

$$\begin{aligned} F_x &= \rho v^2 a \cos 135^\circ + \rho v^2 a \cos(-135^\circ) - \rho V^2 A \\ F_y &= \rho v^2 a \sin 135^\circ + \rho v^2 a \sin(-135^\circ) \end{aligned}$$

上の式では，両辺に $1(= \Delta t)$ が乗ぜられていることを理解しておくこと．

これらの関係に， $v = V$ ， $a = A/2$ を代入すると， $\mathbf{F} = (-(1 + 1/\sqrt{2})\rho V^2 A, 0)$ と求められる． $\mathbf{F}$ は，紙面の左右方向左向きで大きさが $(1 + 1/\sqrt{2})\rho V^2 A$ であることがわかる．

17 流れに関する問題（検査体積，連続の式，運動量と力積の関係，流線に沿ったエネルギーの保存）

ホースから出た，速さ V ，断面積 A の一様で水平な流れを，断面を水平にした，頂角が 2θ の三角柱のブロックを利用して押し返す．このとき，ブロックが動かないように外部から力 F を加える．ブロックに当たる流れの中心線とブロックの断面の中心線とが一致していて，流れは手前と奥に同じ流量に分かれ，ブロックの手前と奥の端とから，ブロックの面に沿って速さ v ，断面積 a で一様に流出する．流れは紙面に垂直な方向に高さを変えないものとして，以下の各問に答えよ．大気圧を p_a ，水の密度を ρ ，重力加速度を g とする．

- (1) v を V を用いて表せ.

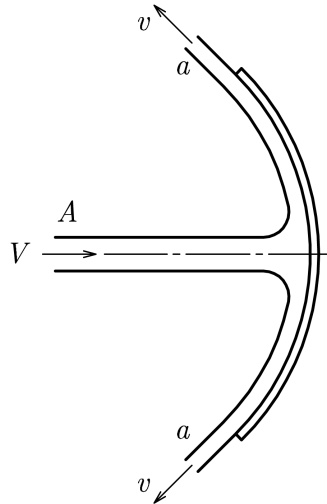


図 14 1/4 円筒と流れ

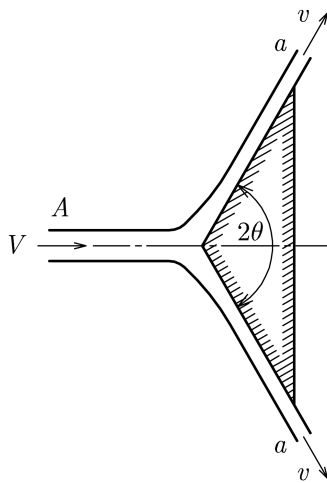


図 15 楔による流れの分割・偏向

楔に当たって方向を変える流れの流線は、検査体積に流入してから流出するまでブロックに流入してたから流出するまでつながっている。この間で流れに対して仕事はなされず、摩擦も無視できるので、流線に沿ってエネルギーが保存されている。したがって、

$$\frac{1}{2}\rho V^2 + p_a = \frac{1}{2}\rho v^2 + p_a$$

より、 $v = V$.

- (2) a を A を用いて表せ.

検査体積に流入した流体の質量と、流出するそれとは同じなので、流れの連続性は $VA = v(2a)$ と表せる。 $v = V$ なので、 $a = A/2$.

- (3) F の大きさと方向・向きとを求めよ。座標軸を自分で設定すること.

流れの領域を大きく囲む検査体積をとり、紙面の左右方向を x 軸、上下方向を y 軸とする.

それぞれの方向について，運動量の変化と力積の関係は， $\mathbf{F} = (F_x F_y)$ として，

$$\begin{aligned} F_x &= \rho v^2 a \cos \theta + \rho v^2 a \cos(-\theta) - \rho V^2 A \\ &= 2\rho V^2 (A/2) \cos \theta - \rho V^2 A \\ &= \rho V^2 A (\cos \theta - 1) \\ F_y &= \rho v^2 a \sin \theta + \rho v^2 a \sin(-\theta) \\ &= \rho v^2 a \sin \theta - \rho v^2 a \sin \theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

上の式では，両辺に $1 (= \Delta t)$ が乗ぜられていることを理解しておくこと．

$\cos \theta - 1 \leq 0$ なので， F_x は負である．また， $F_y = 0$ は流れが上下に関して対称であることから当然，予想される．

すなわち， $\mathbf{F}$ は左右方向・左向きで大きさが $|\mathbf{F}| = \rho V^2 A (1 - \cos \theta)$ である．

18 平板による流れの偏向と板に作用する力

図は，水平面内で，水流が，流れ方向から $\theta (0 < \theta < \pi)$ だけ傾けて静止して置かれた板に当たって方向を変え，板に沿って流れ出る様子を真上から見たものである．図のように $x-y$ 軸をとったとき，板に当たる前の流れは流速 V (x 軸方向・正の向き) と断面積 A ，板に当たった後は奥と手前に分かれ，一様になって板に沿って流出するときの流速と断面積はそれぞれ v_a と a ， v_b と b である．水の流れは水平面内のみで起こり，鉛直方向の成分はないものとする．大気圧を p_a ，水の密度を ρ とし，板と水との間の摩擦は無視できるとして，以下の問に答えよ．

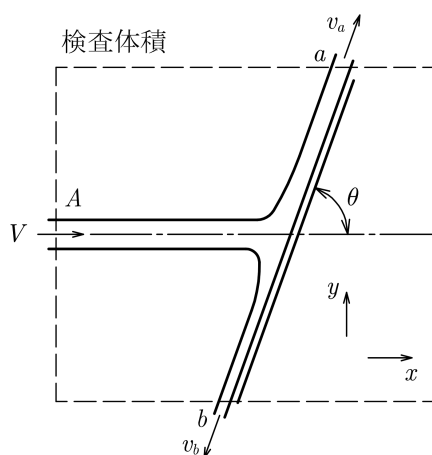


図 16 板に当たる流れ [噴流]

水の流れに対して板が動かないように支えるために必要な力を，以下の手順で解析した．括弧内に適切な用語，式を記入せよ．

「空間の左側から注目している空間（検査体積）に流れ込む質量流量は（ア），流れ出る質量流量は（イ）であり，これらの間の関係は（ウ [名称]）の式を用いて（エ）= 0 と表せる．また，板は静止していて流れとの摩擦も無いので，（オ [名称]）の式から V と v_a ， v_b とは $v_a =$ （カ）， $v_b =$ （キ）

の関係にあることがわかる。(エ), (カ), (キ) をまとめると, 流れの断面積 A , a , b の間の関係が (ク) と求まる. 流れは, 板から流れに作用する力によって方向を変える. 板から流れに作用する力を $\mathbf{F} = (F_x \ F_y)$ とすると, 流れの変化と $\mathbf{F}$ との間の力学的な関係は, x 軸方向については (ケ), y 軸方向については (コ) である. 流れと板との間に摩擦力は働かないので板に沿う力の成分はないことから, F_x と F_y には (サ) = 0 の関係がある. 以上をまとめて解くことにより, $a =$ (シ), $b =$ (ス), $F_x =$ (セ), $F_y =$ (ソ) であることがわかる.]

(ア) 単位時間に検査体積に流入する体積は $VA \times 1$ なので, ρVA .

(イ) 上と同様に, $\rho(v_a a + v_b b)$.

(ウ) 連続 (の式).

(エ) $\rho(v_a a + v_b b) - \rho VA$ または $\rho(v_a a + v_b b - VA)$ または $v_a a + v_b b - VA$.

(オ) 流線に沿ったエネルギー保存 (の式) またはベルヌーイ (の式).

(カ) V .

(キ) V .

(ク) $A = a + b$.

(ケ) $\rho V^2 a \cos \theta + \rho V^2 b \cos(\theta + \pi) - \rho V^2 A = F_x$.

または整理して, $\rho V^2 \{(a - b) \cos \theta - A\} = F_x$.

(コ) $\rho V^2 a \sin \theta + \rho V^2 b \sin(\theta + \pi) = F_y$.

または整理して, $\rho V^2 (a - b) \sin \theta = F_y$.

(サ) $F_x \cos \theta + F_y \sin \theta = 0$.

力が板の方向の成分を持たない.

$\Rightarrow$ 力の方向と板の方向との内積が零 $(F_x \ F_y) \cdot (\cos \theta \ \sin \theta) = 0$ または力の方向と板の法線方向との外積が零 $(F_x \ F_y \ 0) \times (-\sin \theta \ \cos \theta \ 0) = (0 \ 0 \ 0)$.

(シ) (ケ) と (コ) の F_x , F_y を (サ) に代入して全体を ρV^2 で除し, $a - b = a - (A - a) = 2a - A$ であることを利用すると,

$$\begin{aligned} (a - b) \cos^2 \theta - A \cos \theta + (a - b) \sin^2 \theta &= (a - b)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - A \cos \theta \\ &= 2a - A - A \cos \theta \\ &= 2a - (1 + \cos \theta)A \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって,

$$a = \frac{1 + \cos \theta}{2} A$$

(ス) $a + b = A$ から,

$$b = A - a = A - \frac{1 + \cos \theta}{2} A = \frac{1 - \cos \theta}{2} A$$

(セ)

$$a - b = \frac{1 + \cos \theta}{2} A - \frac{1 - \cos \theta}{2} A = A \cos \theta$$

を (ケ) の F_x に代入すると,

$$F_x = \rho V^2 (A \cos^2 \theta - A) = \rho V^2 A (\cos^2 \theta - 1) = -\rho V^2 A \sin^2 \theta$$

(ソ) 上の $a - b$ を (コ) に代入して,

$$\begin{aligned} F_y &= \rho V^2 (a - b) \sin \theta = \rho V^2 A \cos \theta \sin \theta \\ &= \frac{1}{2} \rho V^2 A \sin 2\theta \end{aligned}$$

上の結果を基に, $\theta = 0$ や $\theta = \pi/2$ などの **special case** での状態を自分の経験と比較したり, θ と a , b , F_x や F_y の関係をグラフに描いて考察したりするなどを行うと, 流れの扱いに慣れ, 理解が深まります. 例えば, $\theta = \pi/2$ のときに, $F_x = -\rho V^2 A$ で力は左向き, その大きさは流入した流れの運動量をすべて受け止める $\rho V^2 A$, また $F_y = 0$ で $a = b = A/2$ になることは, 私たちの経験と一致します. $\theta = 0$ のときには $F_x = F_y = 0$ であるのも当然ですね.

19 流れに関する問題 (検査体積, 連続の式, 運動量と力積の関係, 流線に沿ったエネルギーの保存)

図のように, 水平で摩擦がない床の上に直方体のブロックを置いて, その側面に垂直に, ホースから出た速さ v の水の流れを当てたところ, 水はブロックの表面に当たって左右に均等に分かれ, ブロック表面に沿って流れ出た. ホース出口からブロックに当たるまで流れの断面積 A は変わらないとして, 以下の各問に答えよ. ただし, 流れはすべて床からの高さを変えないものとし, 大気圧を p_a , 水の密度を ρ とする.

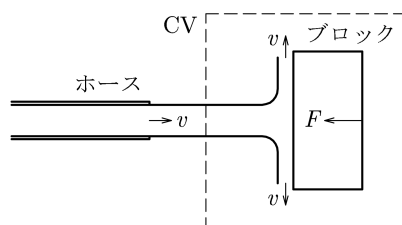


図 17 板に当たる流れ [噴流] (検査体積の枠を追加)

- (1) ブロックが動かないように, ブロックに流れと反対向きの力 F を加える. F の大きさを, 図に破線で示した検査体積 CV における運動量の変化と力積の関係から求めよ.

検査体積について, 単位時間あたりに流入・流出する水の運動量と水に作用する力積の関係を紙面の左右方向について書くと (式の両辺には $\Delta t = 1$ が乗ぜられていることを忘れないこと),

$$0 - \rho v^2 A = -F$$

よって, $F = \rho v^2 A$.

- (2) ブロックに加える力 F を緩めたら, ブロックは右に動き出した. ブロックが一定の速さ u で動いているとき, ブロックに加える力の大きさ F' とブロックが移動する速さ u の関係を

求めよ。この場合、空間に固定した検査体積について考えると、検査体積を出て行く流れは、検査体積に入ってくる流れと垂直にはならず、扱いが面倒である。ブロックと同じ方向・向きに一定の速さ u で移動する、つまりブロックから見て静止している検査体積をとると、検査体積に出入りする流れが簡単になり、(1) と同じように解ける。

(2) では、ブロックとともに移動する検査体積をとると、ブロックに沿って検査体積から出る流れは紙面横方向の速度成分を持たないので、運動量の変化と力積の関係、流線に沿ってのエネルギー保存を書くと

$$0 - \rho (v - u)^2 A = -F'$$

よって、 $F' = \rho (v - u)^2 A$ 。式を立てなくても、暗算で答えられるくらい簡単に扱えます。**special case** を利用して、結果の妥当性を確認してみます。 $u = 0$ ならば $F' = \rho v^2 A$ で (1) と同じで、矛盾はないことがわかります。反対側の **special case** として $u = v$ とすれば $F' = 0$ です。流れはブロックにぶつからない（流れと同じ速さで流れから逃げ続ける）のですから、当然です。

20 次元解析の利用

雨粒が落下する速さについて考えてみる。以下において雨粒は球形をした水の塊として扱い、次元解析と実験データに基づいて検討を行う。各問に答えよ。

- (1) 球が受ける空気の抵抗力 D が、直径 d 、球に当たる流れの速さ V 、空気の密度 ρ に依存すると考えて、これらの間の関係をひとつの無次元パラメータ π にまとめてみる。 $\pi = D d^a V^b \rho^c$ と書くとき、 a 、 b 、 c の値を求めよ。
- (2) 実験によると、(1) の π パラメータの値は、雨粒の落下速度として予想される範囲において 0.80 の一定値とみなせる。直径 1mm の雨粒が 2m/s で落下するとき、空気から受ける抵抗力 D はどれほどか。単位を明記して答えよ。ただし、空気の密度は水の密度の 1/800 とする。
- (3) 雨粒が落下を始めてしばらく経つと、雨粒に作用する重力と空気の抵抗力とがつりあい、落下速度は一定となる。このときの速さを終端速度という。雨粒の直径が 2 倍になると終端速度は何倍になるか、求めよ。途中経過も示すこと。

一様な流れの中に物体を置くと、流れに垂直な断面の両端から渦が交互に放出され、千鳥状に並んで流下して、圧力が変動する。風の強い日に電線が音を立てるのは、この現象による。渦が放出される周波数 $f[\text{Hz}]$ に以下の諸量が関係するとして次元解析を行う。以下の各問に答えよ。

U : 一様な流れの速さ [m/s]

D : 円柱の直径 [m]

- (1) 周波数の単位 Hz の読みを答えよ。また Hz の次元を $[M]^a$ 、 $[L]^b$ 、 $[T]^c$ と書くとき a 、 b 、 c の値を決定せよ。ただし、 $[M]$ 、 $[L]$ 、 $[T]$ はそれぞれ質量、長さ、時間の次元を表す。

- (2) f , U , D の 3 つの物理量の関係を次元解析を用いて整理せよ.
- (3) 直径が 10mm の円柱に 20m/s の風を当てたところ, 400Hz の音が聞こえた. 同じ風速に対して 1 オクターブ高い音 (周波数が 2 倍) を得るには, 円柱の直径をどれだけにすればよいか. 単位を明記して答えよ.