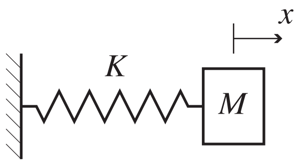
1　自由振動(単振動)

1.1 振動方程式



M : 質量[kg]
K : バネ定数[N/m]
x : 変位[m]

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=-Kx$$

$K/M=\omega^2$ とおくと,

振動方程式 : $\dfrac{d^2x}{dt^2}+\omega^2x=0$

1.2 振動方程式の一般解(単振動, 調和振動)

A 形式での一般解 : $x=A\cos(\omega t+\phi)$

B 形式での一般解 : $x=B_p\cos\omega t+B_q\sin\omega t$

D 形式での一般解 : $x=\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{D}e^{j\omega t}\right]$

$A,\ \phi,\ B_p,\ B_q,\ \boldsymbol{D}$: 任意定数（初期条件で決まる）
A : 変位の振幅[m]
ϕ : 初期位相角[rad]
ω : 固有角振動数[1/s]
$\nu=\dfrac{\omega}{2\pi}$: 固有振動数[Hz]

1.3 振動エネルギ

運動エネルギ：$T=\dfrac{1}{2}M\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2$　[J]

位置エネルギ：$V=\dfrac{1}{2}Kx^2$　[J]

全エネルギ：$W=T+V=\dfrac{1}{2}M\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\dfrac{1}{2}Kx^2$　[J]

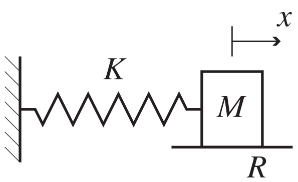
A 形式での一般解を用いて表すと，

$$\begin{aligned}W&=\frac{1}{2}M\left\{-A\omega\sin(\omega t+\phi)\right\}^2+\frac{1}{2}K\left\{A\cos(\omega t+\phi)\right\}^2\\&=\frac{1}{2}KA^2\sin^2(\omega t+\phi)+\frac{1}{2}KA^2\cos^2(\omega t+\phi)\\&=\frac{1}{2}KA^2=\frac{1}{2}M\omega^2A^2\end{aligned}$$

→　時間によらない，初期位相角によらない，
変位の振幅の 2 乗に比例する

2 減衰振動

2.1 減衰振動方程式



M：質量[kg]
K：バネ定数[N/m]
R：抵抗係数[N·s/m]
x：変位[m]

$$M\frac{d^2x}{dt^2}=-Kx-R\frac{dx}{dt}$$

$K/M=\omega^2$，$R/M=\hbar$ とおくと，

減衰振動方程式：$\dfrac{d^2x}{dt^2}+\hbar\dfrac{dx}{dt}+\omega^2x=0$

2.2 減衰振動方程式の一般解(減衰が弱い場合)

A 形式での一般解： $x = Ae^{-\frac{1}{2}\kappa t}\cos(\omega_f t + \phi)$

B 形式での一般解： $x = e^{-\frac{1}{2}\kappa t}\left(B_p \cos\omega_f t + B_q \sin\omega_f t\right)$

D 形式での一般解： $x = e^{-\frac{1}{2}\kappa t}\,\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{D}e^{j\omega_f t}\right]$

ただし， $\omega_f = \sqrt{\omega^2 - \frac{1}{4}\kappa^2} = \omega\sqrt{1-\left(\frac{\kappa}{2\omega}\right)^2}$ とおき，

$\omega^2 - \frac{1}{4}\kappa^2 > 0$，すなわち，$\kappa < 2\omega$ を仮定 → 減衰が弱い場合

ω_f：減衰固有角振動数[1/s]（ωより少し小さい）
κ：制動係数（パワの半値幅）[1/s]
$\tau = 2/\kappa$：減衰率（時定数）[s] → 振幅が $1/e$ となるまでの時間

2.3 振動エネルギ（減衰振動の場合）

全エネルギ： $W = T + V = \frac{1}{2}M\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}Kx^2$

A 形式での一般解を用いて表すと，

$$
\begin{aligned}
W &= \frac{1}{2}M\left[-Ae^{-\frac{1}{2}\kappa t}\left\{\frac{\kappa}{2}\cos(\omega_f t + \phi) + \omega_f \sin(\omega_f t + \phi)\right\}\right]^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}K\left\{Ae^{-\frac{1}{2}\kappa t}\cos(\omega_f t + \phi)\right\}^2 \\
&= \frac{1}{2}MA^2 e^{-\kappa t}\left\{\frac{\kappa^2}{4}\cos(2\omega_f t + 2\phi) + \frac{\kappa}{2}\omega_f \sin(2\omega_f t + 2\phi) + \omega^2\right\}
\end{aligned}
$$

→ W は時間 t の関数となる

そこで，1 周期($T_f = 2\pi/\omega_f$)で時間平均をとると，

$$
\overline{W} = \frac{1}{T_f}\int_{T_f} W(t)\,dt = \frac{1}{2}MA^2\omega^2 e^{-\kappa t} = \frac{1}{2}KA^2 e^{-\kappa t}
$$

2.4 Q 値（減衰の弱さを表す度合）

Q 値：$Q = \omega/k = \omega\tau/2$

→　Q が大きい　＝　減衰が弱い

＝　時定数が大きい

2.5 減衰が強い場合（$k<2\omega$が成り立たない場合）

2.5.1 $\omega^2 - \frac{1}{4}k^2 < 0$，すなわち，$k > 2\omega$のときの一般解

$$x = C_1 e^{\left(-\frac{k}{2}+\omega_h\right)t} + C_2 e^{\left(-\frac{k}{2}-\omega_h\right)t}$$

ただし，$\omega_h = \sqrt{\frac{1}{4}k^2 - \omega^2} = \omega\sqrt{\left(\frac{k}{2\omega}\right)^2 - 1}$

C_1, C_2：任意定数（実数，初期条件で決まる）

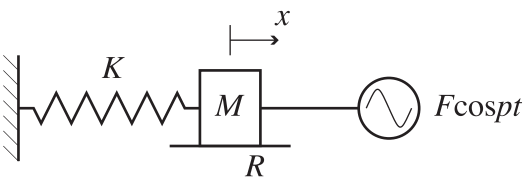
2.5.2 $\omega^2 - \frac{1}{4}k^2 = 0$，すなわち，$k = 2\omega$のときの一般解

$$x = \left(C_1 t + C_2\right)e^{-\omega t}$$

→　臨界制動の状態という

3 強制振動

3.1 強制振動方程式



M：質量[kg]
K：バネ定数[N/m]
R：抵抗係数[N·s/m]
x：変位[m]

F：加振力の振幅[N]
p：加振力の角周波数[1/s]

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - R\frac{dx}{dt} + F\cos pt$$

$K/M = \omega^2$， $R/M = k$ とおくと，

強制振動方程式： $\dfrac{d^2x}{dt^2} + k\dfrac{dx}{dt} + \omega^2 x = \dfrac{F}{M}\cos pt$

3.2 強制振動方程式の定常解

A 形式での定常解：

$$x = A\cos(pt+\phi) = \frac{F}{M}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + k^2p^2}}\cos(pt+\phi)$$

ただし， $\cos\phi = \dfrac{\omega^2 - p^2}{\sqrt{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + k^2p^2}}$， $\sin\phi = \dfrac{-kp}{\sqrt{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + k^2p^2}}$

D 形式での定常解：

$$x = \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{D}e^{jpt}\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{F}{M}\cdot\frac{1}{\omega^2 - p^2 + jkp}e^{jpt}\right]$$

3.3 定常状態における変位振幅・速度振幅・加速度振幅

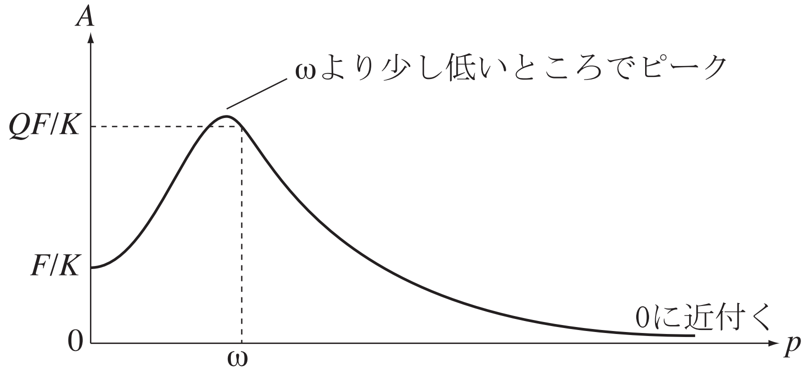
変位振幅： $A = \dfrac{F}{M}\dfrac{1}{\sqrt{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + k^2 p^2}} = \dfrac{F}{Rp}H(p)$

ただし， $H(p) = \dfrac{kp}{\sqrt{\left(\omega^2 - p^2\right)^2 + k^2 p^2}} \quad \left(= -\sin\phi\right)$

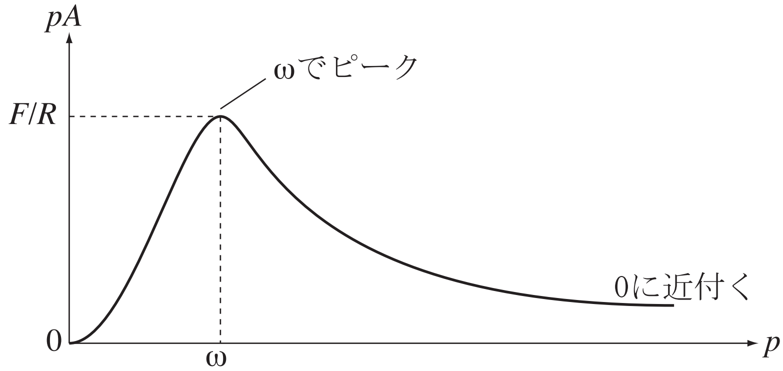
速度振幅： $pA = \dfrac{F}{R}H(p)$

加速度振幅： $p^2 A = \dfrac{Fp}{R}H(p)$

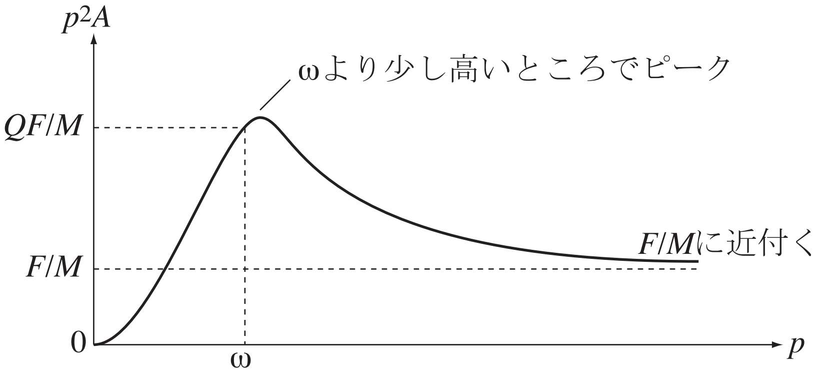
変位振幅

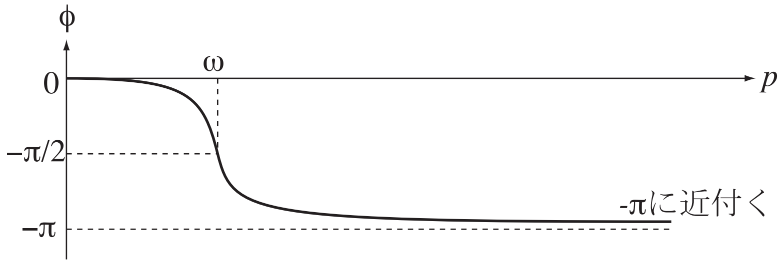


速度振幅

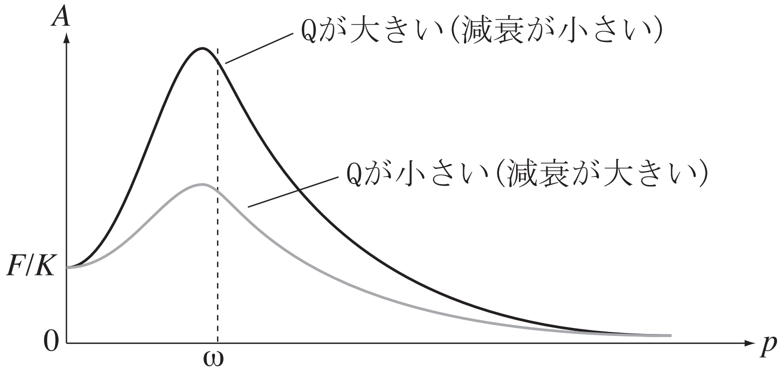


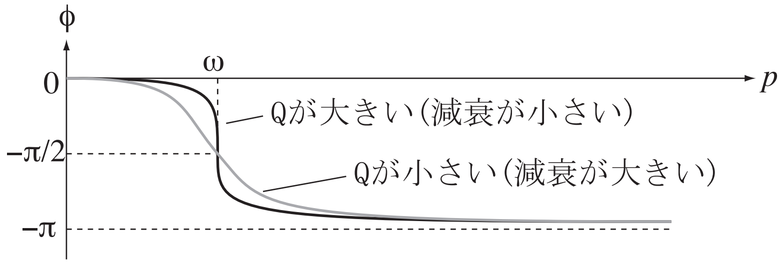
加速度振幅





→　Q 値は，変位振幅（A）または加速度振幅（p^2A）のピーク値の増幅率を表している





3.4 振動システムに吸収されるパワ（= 外力がする仕事率）

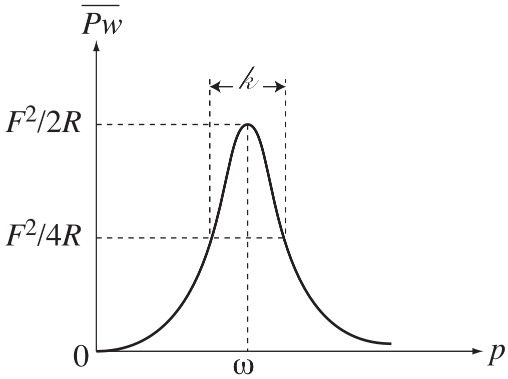
$$
\begin{aligned}
Pw &= F\cos pt \times \frac{dx}{dt} \\
&= F\cos pt \times -\frac{F}{R}H(p)\sin\left(pt+\phi\right) \\
&= -\frac{F^2}{R}H(p)\frac{\sin\left(2pt+\phi\right)-\sin\left(-\phi\right)}{2} \\
&= -\frac{F^2}{2R}H(p)\left\{\sin\left(2pt+\phi\right)+\sin\left(\phi\right)\right\}
\end{aligned}
$$

[J/s] または [W]

→　Pw は時間 t の関数となる

そこで，1 周期(T = $2\pi/p$)で時間平均をとると，

$$
\overline{Pw} = \frac{1}{T}\int_T P(t)dt = -\frac{F^2}{2R}H(p)\sin\phi = \frac{F^2}{2R}H^2(p)
$$



→　$\overline{Pw}$ がピーク値の半分となる角振動数の幅が k となる

よって，k（制動係数）のことをパワの半値幅ともよぶ

3.5 機械インピーダンス

機械インピーダンス ＝ 加振力の複素振幅／速度の複素振幅

$$
\begin{aligned}
Z(p) &= \frac{F}{jp\boldsymbol{D}} \\
&= \frac{F}{jp\dfrac{F}{M}\cdot\dfrac{1}{\omega^2 - p^2 + jkp}} = M\left\{k + \frac{1}{jp}\left(\omega^2 - p^2\right)\right\} \\
&= R + j\left(pM - \frac{K}{p}\right)
\end{aligned}
$$