2024年度　芸術工学部編入学試験問題

数　学

（1枚中1枚目）

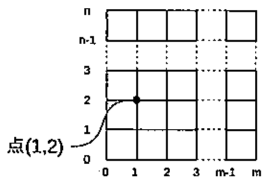
[1] 非負整数 m, n に対し，図は $m+1$ 本の縦方向の道路と $n+1$ 本の横方向の道路から構成される地図を表している．これら道路の交点はすべて交差点である．各交差点は，横方向と縦方向の座標を用いて表されるとする．例えば，図の黒丸は点 $(1,2)$ である．また，横方向の道路は右方向だけ，縦方向の道路は上方向だけに通過可能である．このとき，点 $(0,0)$ から点 (m,n) への経路の総数を $A(m,n)$ で表す．ただし，$A(0,0)=1$ と定義する．以下の問いに答えよ．

(1) $A(0,1)$ と $A(2,3)$ をそれぞれ求めよ．

(2) $A(m,n)$ を求めよ．

(3) 交差点 (a,b) と $(a+1,b+1)$ を直結し右上方向だけに通過可能である道路が一時的に追加されたとする．このとき，点 $(0,0)$ から点 (m,n) への経路の総数を A を用いて表せ．ただし，$0<a<m$, $0<b<n$ とする．

(4) n を偶数とする．さらに，c を $0<c<m$ を満たすある整数とし，d_j を $d_j = 2j-1 \quad (j=1,\ldots,n/2)$ とする．このときのすべての点 (c, d_j) が通過不可能になったとする．このとき，点 $(0,0)$ から点 (m,n) への経路の総数を A を用いて表せ．



[2] n を自然数とし，n 次の実交代行列 A によって定まる関数 $\beta_A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{x}^\top A\boldsymbol{y}$ $(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n)$ と，β_A に関する次の性質 $(*)$ を考える:

$(*)$ 任意の $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対して $\beta_A(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=0$ ならば $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$.

ここで, $\top$ は行列の転置を表し, A が n 次の実交代行列であるとは, $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ かつ $A^\top=-A$ を満たすことである. 以下の問いに答えよ.

(1) 実交代行列 $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ に対する関数 β_{A_1}, β_{A_2} がそれぞれ性質 $(*)$ を満たすか答えよ.

(2) 関数 β_A が性質 $(*)$ を満たすことと行列 A のすべての行ベクトルが一次独立であることが同値であることを示せ.

(3) 関数 β_A が性質 $(*)$ を満たすとき, 行列 A の次数 n は偶数であることを示せ.

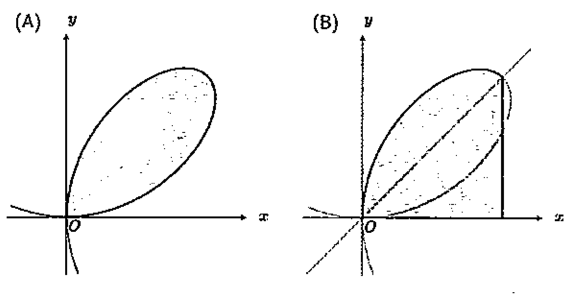
[3] $a>0$, $f(x,y) = x^3 - axy + y^3$ とする．xy 平面上で曲線 C: $f(x,y)=0$ に囲まれた部分（図 A で塗りつぶされた領域）の面積を求めるため，以下の各問に答えよ．

(1) 関係式 $y=tx$ をみたす媒介変数 t（ただし $t\neq -1$ とする）を用いて，曲線 C 上の任意の点 (x_C, y_C) を媒介変数表示せよ．

(2) 上記 (1) の $x_C(t)$ について，$t<-1$ の部分と $t>-1$ の部分に分けて増減表をかけ．増減表には $t\to\pm\infty$ および $t\to -1\pm 0$ の情報も含めよ．

(3) 図 B には曲線 C と直線 $y=x$，およびそれらの交点（2 点のうち原点でない方）から x 軸に下した垂線が描かれている．図 B で塗りつぶされた領域の面積を求めよ．

(4) 図 A で塗りつぶされた領域の面積を求めよ．



[4] 直交座標 (x,y) 上の関数

$$f(x,y) = \frac{1}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

が領域 $D = \{(x,y) : 1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2x\}$ で定義されている．以下の各問に答えよ．

(1) 領域 D を図示せよ．

(2) D 中の点 (x,y) を r を動径，θ を位相角とする平面極座標で表したとき，領域 D 内の点 (r,θ) が満たすべき条件を答えよ．

(3) $f(x,y)$ の領域 D での積分を求めよ．