2023年度　芸術工学部編入学試験問題

数　　学

（1枚中1枚目）

---

[1] α, β, γ を実数とし，A を 3 次正方行列

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ 1 & \beta & \beta^2 \\ 1 & \gamma & \gamma^2 \end{bmatrix}$$

とする．以下の各問いに答えよ．

(1) A が逆行列をもつ条件を α, β, γ を用いて答えよ．

(2) $\alpha = -1, \beta = 0, \gamma = 1$ とするときの A の逆行列を求めよ．

(3) y_1, y_2, y_3 を実数とする．xy 平面上の 3 点 $(-1, y_1), (0, y_2), (1, y_3)$ を通過する二次関数が下に凸となる条件を y_1, y_2, y_3 を用いて示せ．

[2] 3 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ における基底の 1 つを $\{v_1, v_2, v_3\}$ とする．また，実定数 α によって定まる線形写像 $f_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ は，

$$f_\alpha(v_1) = v_2 + \alpha v_3, \quad f_\alpha(v_2) = v_3 + \alpha v_1, \quad f_\alpha(v_3) = v_1 + \alpha v_2$$

を満たすとする．解答にあたり，以下を用いてよい: ユークリッド空間内の図形を正方行列 M で変換するとき，行列式の絶対値 $|\det M|$ は，M が 2 次正方行列であれば変換前後の図形の面積の拡大率，M が 3 次正方行列であれば変換前後の図形の体積の拡大率である．以下の各問いに答えよ．

(1) $\alpha = 1$ とする．$\mathbb{R}^3$ 内にある体積 1 の立方体を C とすると，$f_1(C)$ の体積はいくつか．

(2) $\alpha = z$ のとき，f_z によって $\mathbb{R}^3$ 内のすべての点は，ある平面 P に移される．z の値はいくつか．

(3) 前問の平面 P 上に，面積 1 の正方形 S を考える．前問の z に対して，$f_z(S)$ の面積はいくつか．

[3] 以下の各問いに答えよ．

(1) 実数 $a (\neq 0)$ に対する逆正接関数 $y = \arctan(x/a)$ の微分を求めよ．

(2) 実数 b に対する不定積分

$$\int \frac{1}{x^2 + 2bx + 2b^2} \mathrm{d}x$$

を求めよ．

(3)「部分分数への分解」を用いて，次の不定積分を求めよ．

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^4 + 1}$$

[4] $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$,　$1 < b < \sqrt{2}$ とする．また $\phi = \arccos(1/b)$（$\cos\phi = 1/b, 0 < \phi < \pi/2$ を満たすラジアン角）とする．以下の定積分を考える．

$$V = \int_0^1 \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{b^2-x^2}} f(x, y) \mathrm{d}y \mathrm{d}x \cdots (*)$$

以下の各問いに答えよ．

(1) xy 平面上で $(*)$ によって $f(x, y)$ が積分される領域を図示せよ．

(2) 以下の等式が成立することを $t = \sin\theta$ と置換して積分することで示せ．ただし C は積分定数である．

$$\int \frac{1}{\cos\theta} \mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \log \left| \frac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta} \right| + C$$

(3) V の定積分を求めよ．ただし b などを用いて ϕ を消去したものを示せ．