

数 学

(1 枚中 1 枚目)

- [1] 1 から N までの N 個の正の整数を K 個の部分集合に分けることを考える. K 個の部分集合からなる集合を分割と呼ぶ. ただし, どの部分集合も空集合であってはならない. 例えば, $N = 3, K = 2$ の場合の分割は以下の 3 個である: $\{\{1\}, \{2, 3\}\}, \{\{2\}, \{3, 1\}\}, \{\{3\}, \{1, 2\}\}$.

以下の問いに答えよ.

- (1) $N = 5, K = 2$ の場合の分割の個数を数えよ.
- (2) $N = 5, K = 3$ の場合の分割の個数を数えよ.
- (3) $N = 5, K = 2$ の場合において, 各分割は等確率で発生すると仮定する. このとき, 2 つの正数 1 と 2 が同じ部分集合に入る確率を求めよ.
- (4) $N = 5, K = 2$ の場合において, 各分割は等確率で発生する仮定の下, 2 つの分割 A と B を独立に作ったとする. このとき, 分割 A と B のそれぞれにおいて, 同時に正数 1 と 2 が同じ部分集合に属している確率を求めよ.

- [2] (1) 次の行列 A の固有値をすべて求めよ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- (2) n 次正方行列 M は $M^2 = M$ を満たすとする. M の固有値, 固有ベクトルをそれぞれ λ, v とすると, $\lambda v = \lambda^2 v$ が成り立つことを示せ.
- (3) M は 0, 1 以外の固有値を持たないことを示せ.
- (4) $\det M \neq 0 \Leftrightarrow M = I$ を示せ. ただし, $\det M$ は M の行列式, I は n 次の単位行列を表す.

- [3] 関数

$$f(x) = \int_0^1 |e^{t-x} - 1| dt \quad (0 \leq x \leq 2)$$

を考える.

- (1) $x = 1/2$ として, 被積分関数 $g(t) = |e^{t-x} - 1|$ の概形を $-2 \leq t \leq 2$ の範囲で図示せよ.
- (2) $f(x)$ を求めよ.
- (3) $f(x)$ の最小値を求めよ.

- [4] 以下の各問いに答えよ.

- (1) I を以下の重積分とする.

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} \int_{\frac{1}{1-y}}^2 f(x, y) dx dy$$

xy 平面上に, 積分範囲を図示せよ.

- (2) $f(x, y) = xe^{xy}$ として前問 (1) の I の値を求めよ.
- (3) 正の実数 x, y に対して $G(x, y)$ を以下のように定義する.

$$G(x, y) = \frac{x^y}{\log x}$$

$G(x, y)$ の y に関する偏微分 $\partial G / \partial y$ を求めよ.

- (4) $p \geq q > 0$ とする. 以下を示せ.

$$\int_0^1 \frac{x^p - x^q}{\log x} dx = \log \frac{p+1}{q+1}$$