数理生命情報学

令和７（２０２５）年度　大学院　修士課程（一般入試）学力検査問題

解答例・略解

[1]

４つの選択に関して略解を示す。

(1) 関数の連続

実数値関数 $f(x)$ を考えるとき、任意の実数 a において、関数 $f(x)$ の極限が存在し、その値が $f(a)$ に等しいとき、$f(x)$ は a で連続であるという。

(4) 相関係数

二つの確率変数 X, Y の線形関係の強さを示す指標で、値は -1 以上 1 以下の範囲をとる。共分散 $\mathrm{Cov}[X, Y]$ を標準偏差 σ_X, σ_Y で割ったもの。

(9) 幅優先探索

グラフ探索アルゴリズムの一つで、最も浅い（スタートからの距離が短い）ノードから順に探索する方法。

(14) ヌクレオチド

DNA や RNA を構成する基本単位で、リン酸、糖（リボースまたはデオキシリボース)、塩基からなる。

[2]

問題 1

(1)1

(2)$(\sinh kx)' = k\cosh kx, (\cosh kx)' = k\sinh kx$

(3)$\sinh 2x = 2\sinh x\cosh x, \cosh 2x = 2\cosh^2 - 1$

(4)$x = \sinh x$ による置換積分を行えば、$\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx = \log(x+\sqrt{x^2+1}) + C$ を得る。

問題 2

(1)$(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}})$ のとき。

(2) 直方体の 3 辺を x, y, z とすると、ラグランジュの未定乗数法より① $yz - \lambda(y+z) = 0$, ② $xz - \lambda(x+z) = 0$, ③ $xy - \lambda(x+y) = 0$, ④ $xy + yz + zx - 3 = 0$ を得る。①②より $x = y$、②③より $y = z$。したがって、$x = y = z$。すなわち 1 辺が $6^{\frac{1}{3}}$ の立方体。

問題 3

(1) D の条件式より次の４つの不等式を得る：

$$\begin{aligned} &y \le -x, \\ &y \ge -x+1, \\ &y \le x, \\ &y \ge x-1. \end{aligned}$$

これらから得られる領域は、4 点 $(0,0), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), (1, 0)$ からなる四角形である。(2) D を積分範囲に変換すると、x の範囲は $0 \le x \le 1$、各 x に対して y の範囲は $-(x-1) \le y \le x$ となる。したがって、積分式は次のように表せる：

$$I = \int_0^1 \int_{-(x-1)}^{x} \frac{x-y}{1+x+y}\,dy\,dx.$$

内側の積分

$$I_1 = \int_{-(x-1)}^{x} \frac{x-y}{1+x+y}\,dy.$$

は変数変換 $u = 1 + x + y$ を導入し計算すると、最終的に次を得る：

$$I = \frac{1}{2}\ln 2 - \frac{1}{4}.$$

[3]

問題 1

(1)$\frac{(36-40)^2}{40} + \frac{(33-30)^2}{30} + \frac{(22-20)^2}{20} + \frac{(9-10)^2}{10} = \frac{4+3+2+1}{10} = 1$

(2)$4 - 1 = 3$

問題 2

(1) 体重から体脂肪率をよく予測することはできない。

(2) $1.33/218.42 = 0.006$

(3) ②（傾きの P 値が大きいことから、信頼区間にゼロが含まれることがわかる）

問題 3

１つめの解析：

1. 各地点の土砂崩れの有無を予測できたか
2. 降雨量、最大斜度、河川からの距離、利用状況のいずれかから、土砂崩れの有無を予測できる
3. ①③⑤⑥
4. ⑥を被説明変数とした多変量ロジスティック回帰分析を行う。
5. あるメッシュの最大斜度は隣接メッシュの③のデータから概算できる。河川からの距離は①から算出できる。

[4]

1.1　乗法定理より、$p(A \cap B) = p(B|A)p(A) = p(A|B)p(B)$ である。これより、ベイズの定理 $p(B|A) = \frac{p(A|B)p(B)}{p(A)}$ を得る。

1.2　ベイズの定理を用いて解く。対象となる確率 $p(\text{非罹患者} \mid \text{陽性})$ はベイズの定理により次のように表せる：

$$p(\text{非罹患者} \mid \text{陽性}) = \frac{p(\text{陽性} \mid \text{非罹患者}) \cdot p(\text{非罹患者})}{p(\text{陽性})}$$

各項の計算は次のようになる：

$p(\text{非罹患者}) = 0.9998$（非罹患者の割合）

$p(\text{罹患者}) = 0.0002$（罹患者の割合）

$p(\text{陽性} \mid \text{罹患者}) = 0.86$（罹患者の陽性率）

$p(\text{陰性} \mid \text{罹患者}) = 0.14$（罹患者の陰性率）

$p(\text{陽性} \mid \text{非罹患者}) = 0.070$（非罹患者の陽性率）

$p(\text{陰性} \mid \text{非罹患者}) = 0.930$（非罹患者の陰性率）

次に、全体の陽性率 $p(\text{陽性})$ は次のように計算できる：

$$p(\text{陽性}) = p(\text{陽性} \mid \text{罹患者}) \cdot p(\text{罹患者}) + p(\text{陽性} \mid \text{非罹患者}) \cdot p(\text{非罹患者})$$

代入し計算すると次を得る：

$$p(\text{陽性}) = 0.86 \cdot 0.0002 + 0.070 \cdot 0.9998 = 0.070158$$

最後に、ベイズの定理に代入すると次を得る：

$$p(\text{非罹患者} \mid \text{陽性}) = \frac{0.070 \cdot 0.9998}{0.070158} \approx \frac{0.069986}{0.070158} \approx 0.9975$$

よって、検査結果が陽性であるとき、その人が非罹患者である確率は約 0.9975 である。

2　正規分布の確率密度関数 $f(x|\mu, \sigma^2)$ は次のように定義される：

$$f(x|\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

一般に、N 個のデータ点 $\{x_1, x_2, \ldots, x_N\}$ に対する尤度関数は、これらのデータ点が正規分布に従うときの確率の積である尤度関数 $L(\mu, \sigma^2)$ である：

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{N} f(x_i|\mu, \sigma^2)$$

これの対数を取り（対数尤度関数）、展開すると次を得る：

$$\ell(\mu, \sigma^2) = \sum_{i=1}^{N} \left[-\frac{1}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right] = -\frac{N}{2}\log(2\pi\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2$$

よって、一般に μ の最尤推定値 $\hat{\mu}$ は次の解である：

$$\frac{\partial \ell(\mu, \sigma^2)}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \mu) = 0$$

これを解くと、

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$$

よって、与えられたデータ点 $\{-2,-1,0,1,2\}$ に対する平均パラメータの最尤推定値は次となる：

$$\hat{\mu} = \frac{-2+(-1)+0+1+2}{5} = \frac{0}{5} = 0$$

同様に σ^2 の最尤推定値は次の解である：

$$\frac{\partial \ell(\hat{\mu}, \sigma^2)}{\partial \sigma^2} = -\frac{N}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{\mu})^2 = 0$$

これを解くと、

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \hat{\mu})^2$$

与えられたデータ点 $\{-2,-1,0,1,2\}$ に対する分散パラメータの最尤推定値は次となる：

$$\sigma^2 = \frac{1}{5}\left[(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 + 2^2\right] = \frac{1}{5}[4+1+0+1+4] = \frac{10}{5} = 2$$

3　(1) データ点が独立であると仮定すると，尤度関数は次のように表される：

$$L(\mu \mid \{x_i\}) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)^N \exp\left(-\sum_{i=1}^{N}\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \tag{1}$$

(2) 事後確率 $p(\mu|\{x_i\}, \mu_0, \sigma_0^2)$ の導出を行う。

ベイズの定理を用いると，事後確率は次のように表される：

$$p(\mu|\{x_i\}, \mu_0, \sigma_0^2) \propto L(\mu; \{x_i\}) \cdot p(\mu). \tag{2}$$

ここで，$p(\mu)$ は事前確率であり，正規分布 $N(\mu_0, \sigma_0^2)$ に従うと仮定する：

$$p(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left(-\frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right). \tag{3}$$

これを事後確率に代入すると：

$$p(\mu|\{x_i\}, \mu_0, \sigma_0^2) \propto \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2 - \frac{(\mu-\mu_0)^2}{2\sigma_0^2}\right]. \tag{4}$$

指数部分を整理すると，平方完成により次のようになる：

$$p(\mu|\{x_i\}, \mu_0, \sigma_0^2) \propto \exp\left(-\frac{(\mu-\mu_{\text{post}})^2}{2\sigma_{\text{post}}^2}\right), \tag{5}$$

ここで，事後分布の平均 μ_{post} と分散 σ_{post}^2 は次のように求められる：

$$\mu_{\text{post}} = \frac{\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{N} x_i + \frac{\mu_0}{\sigma_0^2}}{\frac{N}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}}. \tag{6}$$

$$\sigma_{\text{post}}^2 = \left(\frac{N}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma_0^2}\right)^{-1}. \tag{7}$$

4.1　計算すると $a_2 = 1,\ a_3 = -4,\ a_4 = -11$ となる。

4.2

```
def a(n) { if (n == 0) return 1; if (n == 1) return 2; return 2 * a(n-1) - 3 * a(n-2); }
```

[5]

問題 1

(1) 固定点 $x* = 0, K$

(2) フェーズポートレート x-$\dot{x}$ の傾きによって、安定性を判別できる。$r > 0$ とき $x = 0, K$ はそれぞれ不安定、局所安定。$r < 0$ のとき $x = 0, K$ はそれぞれ局所安定、不安定。

(3) 常に $\dot{x} = 0$ であるから、すべての x は固定点である。したがって $x(0)$ の値を維持する。また中立安定となっている。

解 答 例・略 解

問題 2

(1)$\dot{y} = -\frac{k}{m}x - \frac{b}{m}y$ (2)$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{b}{m} \end{bmatrix}$

(3) 行列 A の固有値が複素数になる条件から $b^2 - 4mk < 0$。

問題 3

(1)$x(t) = x_0 e^{-ky_c t}$

(2)$z(t) = x_0(1 - e^{-ky_c t}$

(3)$\dot{x} = k_1 ax - k_2 x^2 - k_3 bx$

(4)$k_1 a - k_3 b > 0$

(5) トランスクリティカル分岐

[6]

問題 1

a デオキシリボース（糖）,b チミン c グアニン d ヒストン, e クロマチン, f ゲノム, g 46, h 23, i リボソーム, j プロモーター, k 転写因子, l RNA ポリメラーゼ, m tRNA（トランスファー RNA）, n ペプチド結合, o フォールディング

問題 2

(1) 94 98 ℃程度で加熱する。塩基間の水素結合が切れ、DNA が 2 本鎖に分かれる。

(2) 例えば、

Fw: `TACATTCTACAACTACAGCC`

Rv: `AATTCGTTTGGGCTACTCTA`

(3) DNA ポリメラーゼ

問題 3

a スキャホールド DNA, b ステープルストランド, c 粘着末端 (sticky end)

問題 4

5’-`TACGAGCCAGGGGAACTCGTA`-3’

ループ解除 DNA: 5’-`TTCCCCTGGCTCGTA`-3’

問題 5

(1) まず、ランベルトベールの式に従って、モル濃度を計算する。1.0×10^{-6} mol/L

次にモル濃度を ng/µL に換算する。3.3 ng/µL

(2) 25 µL : DNA, 75 µL H_2O

[7]

問題 1

(1)

a. 核：細胞の遺伝情報を保持し、DNA の複製や転写の中心。

b. ミトコンドリア：細胞のエネルギーである ATP を生成

c. ゴルジ体：タンパク質などの物質貯蔵・分泌

d. リソソーム：細胞内の老廃物や異物を分解

(2)

a. 構造的特徴

微小管：中空状で直径 25 nm の繊維、主に 13 本のプロトフィラメントから構成

アクチン繊維：直径 7 9 nm 程度の 2 重らせん構造をもつ繊維

b. 重合に使用するヌクレオチド

微小管：GTP

アクチン繊維：ATP

c. 構成単位のタンパク質の名称

微小管： αβチューブリン

アクチン繊維：G-アクチン

d. 細胞内における主な機能を 2 つ

微小管： 染色体分離、細胞内物質輸送、繊毛運動など

解 答 例・略 解

アクチン繊維：細胞運動、細胞の形態支持、細胞分裂など

e. 相補的なモータータンパク質の一般的な名称（微小管は 2 つ答えて完答とする）

微小管： キネシン、ダイニン

アクチン繊維：ミオシン

(3)

ラメリポディア（葉状仮足)、フィロポディア（糸状仮足）

(4)

核形成：重合の初期段階であり、少数の単量体が集合して安定な核（オリゴマー）を形成する。※繊維形成の出発点となるニュアンスが含まれていれば、正当とする。臨界濃度：単量体の濃度がポリマーの伸長と解離の速度が等しくなる点を指す。臨界濃度以上ではポリマーが成長し、臨界濃度以下ではポリマーが解離する。

(5)

微小管：γチューブリン複合体　(おまけで中心体も可とする)

アクチン繊維：Arp2/3 複合体

問題 2

a. 細胞の 3D 蛍光イメージング：CLSM

b. 蛍光色素が多量に存在する系中のカバーガラス表面の蛍光標識した細胞骨格：TIRFM

c. ウイルスの内部分子構造：TEM

d. 細胞の表面構造をナノメートルスケールの解像度で生細胞観察：HS-AFM

e. バクテリアの表面構造をナノメートルスケールの解像度で観察：SEM

問題 3

a. His-tag 融合タンパク質の精製：C

b. 異なる分子サイズのタンパク質の分離解析（変性あり）：B

c. 異なる分子サイズのタンパク質の分画：E

d. GST-tag タンパク質の精製：A

e. 重合した微小管を細胞抽出液から分離：D

問題 4

$K_d = k_{\mathrm{off}}/k_{\mathrm{on}} = 1.0 \times 10^{-14}$ M