

数学

解答紙

受験番号

(4枚中1枚目)

[1]

[1] 組み合わせの総数は

$$\binom{8}{3} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 56$$

1 + 2 + 3 = 6 から 6 + 7 + 8 = 21 までの間にある素数は 7, 11, 13, 17, 19 であり, それぞれを実現する組み合わせは

$$\begin{aligned} 7 &= 1 + 2 + 4 \quad (1 \text{通り}) \\ 11 &= 1 + 2 + 8 = 1 + 3 + 7 = 1 + 4 + 6 = 2 + 3 + 6 = 2 + 4 + 5 \quad (5 \text{通り}) \\ 13 &= 1 + 4 + 8 = 1 + 5 + 7 = 2 + 3 + 8 = 2 + 4 + 7 = 2 + 5 + 6 = 3 + 4 + 6 \quad (6 \text{通り}) \\ 17 &= 2 + 7 + 8 = 3 + 6 + 8 = 4 + 5 + 8 = 4 + 6 + 7 \quad (4 \text{通り}) \\ 19 &= 4 + 7 + 8 = 5 + 6 + 8 \quad (2 \text{通り}) \end{aligned}$$

計 18 通り. よって求める確率は

$$\frac{18}{56} = \frac{9}{28}$$

[2] 順列の総数は $8^3 = 2^9$.

整数 u を, 3つの自然数に分割することを考える. このとき $u \leq 10 = 1 + 1 + 8$ より, 3分割に 9以上の数が含まれる余地はない. よって, あらかじめ各数の最小値 1 を減じておき, 残りの $u - 1 \cdot 3 = u - 3$ を 2つの区切りで 3分割した後, 各々に 1 を加えれば十分である. その順列の総数は

$$\binom{u-3+2}{2} = \binom{u-1}{2} = \frac{(u-1)(u-2)}{2}$$

求める確率は

$$\frac{(u-1)(u-2)}{2 \cdot 512} = \frac{(u-1)(u-2)}{1024}$$

[3] まず各数の最大値が 8 であることを考慮せずに, 自然数 13 を, 3つの自然数に分割することを考える. あらかじめ各数の最小値を減じておき, 残りの $13 - 1 \cdot 3 = 10$ を 2つの区切りで 3分割した後, 各々に 1 を加えればよい. その順列の総数は

$$\binom{10+2}{2} = \binom{12}{2} = \frac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} = 2 \cdot 3 \cdot 11$$

ただしこれらの順列の一部は, 9 (以上の数) を 1つ含む. それら一部順列は, $13 - (9 + 1 \cdot 2) = 2$ を 2つの区切りで 3分割し, それぞれの 1番目, 2番目, 3番目いずれか 1つに 9 を, 残る 2つに 1 を加えることで得られる. その総数は

$$\binom{2+2}{2} \cdot \binom{3}{1} = \binom{4}{2} \cdot \binom{3}{1} = \frac{4 \cdot 3}{2 \cdot 1} \cdot \frac{3}{1} = 2 \cdot 3^2$$

よって求める確率は

$$\frac{2 \cdot 3 \cdot 11 - 2 \cdot 3^2}{2^9} = \frac{3(11-3)}{2^8} = \frac{3}{32}$$

【別解】

自然数 13 を, (8以下の) 3つの自然数に分割することを考える. 組み合わせを特定したあと順列の数を考える.

(1) 3つの異なる自然数に分割する組み合わせは前問 (1) より 6通り. その順列は

$$6 \cdot 3! = 2^2 \cdot 3^2$$

(2) 同じ数を 2回用いる組み合わせは

$$13 = 3 + 3 + 7 = 4 + 4 + 5 = 5 + 5 + 3 = 6 + 6 + 1$$

4通り. その順列は

$$4 \cdot \binom{3}{2} = 2^2 \cdot 3$$

(3) 同じ数を 3回用いる組み合わせは 3の倍数になるが, 13は素数であるので, 存在しない.

よって求める確率は

$$\frac{2^2 \cdot 3^2 + 2^2 \cdot 3}{2^9} = \frac{3(3+1)}{2^7} = \frac{3}{32}$$

[4] $1 \cdot 3 = 3$ から $8 \cdot 3 = 24$ までの間にある素数は 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 である.

(1) $u \in \{3, 5, 7\}$ とする。 u を自然数 3 つに分割したとき、9 を超える数を含むことはない。 小問 (2) の途中式に代入することで各々の順列の数を求めると

$$u = 3 : \frac{2 \cdot 1}{2} = 1$$

$$u = 5 : \frac{4 \cdot 3}{2} = 6$$

$$u = 7 : \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

(2) $v \in \{11, 13, 17\}$ とする。 v を自然数 3 つに分割したとき、一部は 9 以上の数を 1 つ含む。 小問 (3) を一般化して順列の数を求めると

$$\binom{v-3+2}{2} - \binom{v-11+2}{2} \cdot \binom{3}{1} = \binom{v-1}{2} - 3 \binom{v-9}{2} = \frac{(v-1)(v-2) - 3(v-9)(v-10)}{2}$$

$$v = 11 : \frac{10 \cdot 9 - 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 45 - 3 = 42$$

$$v = 13 : \frac{12 \cdot 11 - 3 \cdot 4 \cdot 3}{2} = 66 - 18 = 48$$

$$v = 17 : \frac{16 \cdot 15 - 3 \cdot 8 \cdot 7}{2} = 120 - 84 = 36$$

(3) $w \in \{19, 23\}$ とする。 w を自然数 3 つに分割したとき、一部は 9 以上の数を 1 つまたは 2 つ含む。 小問 (3) と全く同じやり方をすると、9 以上の数を 2 つ含む同一の順列がそれぞれちょうど 2 回カウントされて引き算されることになる。 そこで、さらに 9 以上の数を 2 つ含む順列の数を求めて足し算すればよい。

$$\binom{w-3+2}{2} - \binom{w-11+2}{2} \cdot \binom{3}{1} + \binom{w-19+2}{2} \cdot \binom{3}{2} = \binom{w-1}{2} - 3 \binom{w-9}{2} + 3 \binom{w-17}{2}$$

$$= \frac{(w-1)(w-2) - 3[(w-9)(w-10) - (w-17)(w-18)]}{2}$$

$$w = 19 : \frac{18 \cdot 17 - 3 \cdot (10 \cdot 9 - 2 \cdot 1)}{2} = 153 - 3(45 - 1) = 21$$

$$w = 23 : \frac{22 \cdot 21 - 3 \cdot (14 \cdot 13 - 6 \cdot 5)}{2} = 231 - 3(91 - 15) = 3$$

よって求める確率は

$$\frac{1 + 6 + 15 + 42 + 48 + 36 + 21 + 3}{2^9} = \frac{172}{2^9} = \frac{43}{128}$$



数学

解答紙

受験番号

(4枚中2枚目)

[2]

(1) 求める条件は、行列 $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det M$ の値が 0 であることと同値、

$$\therefore \det M = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \alpha \\ 1 & 0 & \beta \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \alpha + \beta - 1 = 0.$$

よって、 $\alpha + \beta = 1$ が求める条件である。またこの条件が満たされるとき、これらの 3 点は平面 $z = 1$ において直線 $x + y = 1$ 上にあることが分かる。すなわち 3 点は同一長直線上にある。

(2) $\vec{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{e} = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 1 \end{pmatrix}$ とする。3 つのベクトルが一次従属であるとき、ある実数 c_1, c_2 を用いて $\vec{f} = c_1\vec{d} + c_2\vec{e}$, すなわち

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ 1 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1d_1 + c_2e_1 \\ c_1d_2 + c_2e_2 \\ c_1 + c_2 \end{pmatrix}$$

と表せる。これより $c_1 + c_2 = 1$ が成り立つ。このことから、点 F は線分 DE を $c_1 : c_2$ に内分する (c_1 または c_2 が負の場合は外分を表す) 点であることが分かるため、3 点 D, E, F は同一直線上にあることが分かる。

(3) 点 P, Q, R を平面 $z = 1$ 上に置いたときの位置ベクトルをそれぞれ $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ とする。前問の結果より、 $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ が一次従属であることと、3 点 P, Q, R が同一直線上にあることは同値である。よって、3 点 P, Q, R が同一直線上にあるとき、行列 $M' = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & u \\ 4 & \frac{1}{2} & 4u^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ の行列式 $\det M'$ の値は 0 である。

$$\therefore \det M' = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & u \\ 4 & \frac{1}{2} & 4u^3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{1}{2}(4u^3 - 7u + 3) = -\frac{1}{2}(u-1)(u-1/2)(u+3/2) = 0, \therefore u = 1, \frac{1}{2}, -\frac{3}{2}.$$

3 点は異なることから、 $u = -\frac{3}{2}$.

(4枚中3枚目)

[3]

(1) $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} dt$ について,

$$\begin{aligned} dx/dt &= -\sin t + \sin t + t \cos t = t \cos t, \quad dy/dt = \cos t - \cos t + t \sin t = t \sin t \\ (dx/dt)^2 &= t^2 \cos^2 t, \quad (dy/dt)^2 = t^2 \sin^2 t \end{aligned}$$

$t \geq 0$ であることから, $ds = \sqrt{t^2 \cos^2 t + t^2 \sin^2 t} dt = t dt$. よって,

$$s = \int_s ds = \int_0^u \frac{ds}{dt} dt = \int_0^u t dt = \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^u = \frac{1}{2} u^2$$

(2) (1) で求めた $dx/dt = t \cos t$, $dy/dt = t \sin t$, $ds/dt = \sqrt{(dx/dt)^2 + (dy/dt)^2} = t$ を利用して

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{t \sin t}{t \cos t} = \tan t \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} = \frac{dt}{dx} \frac{d}{dt} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{dx/dt} \frac{d}{dt} \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1}{t \cos t} \frac{d}{dt} \tan t = \frac{1}{t \cos^3 t} \end{aligned}$$

よって,

$$R = \frac{(1 + \tan^2 t)^{3/2}}{|1/(t \cos^3 t)|} = \frac{\{(\cos^2 t + \sin^2 t)/\cos^2 t\}^{3/2}}{1/|t \cos^3 t|} = \frac{1/(\cos^2 t)^{3/2}}{1/|t \cos^3 t|} = \frac{1/|\cos t|^3}{1/(t |\cos t|^3)} = t \quad (\because t > 0)$$

(3) 曲線 r の接線方向のベクトルは $\mathbf{a} = (dx/dt \ dy/dt) = (t \cos t \ t \sin t)$.

円への接線に沿うベクトルのひとつ \mathbf{b} は, 円の中心 O と点 P の距離が $d = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + t^2}$ であることから, 点 P と円周上の接点との距離が $\sqrt{d^2 - 1^2} = \sqrt{1^2 + t^2 - 1^2} = t$ で $\tan \psi = t$. また, $\tan \alpha = y/x = (\sin t - t \cos t)/(\cos t + t \sin t)$ により,

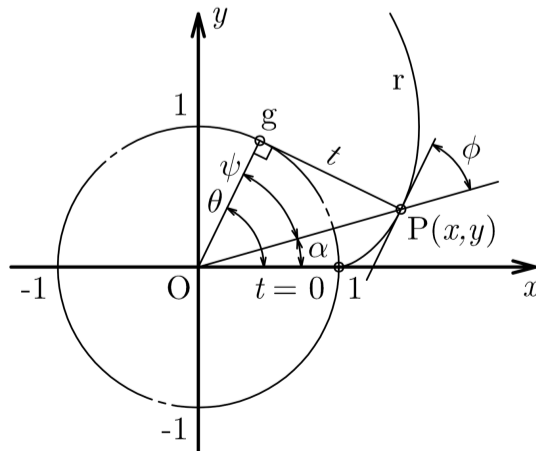
$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\psi + \alpha) = \frac{\tan \psi + \tan \alpha}{1 - \tan \psi \tan \alpha} \\ &= \frac{t + (\sin t - t \cos t)/(\cos t + t \sin t)}{1 - t(\sin t - t \cos t)/(\cos t + t \sin t)} = \frac{t \cos t + t^2 \sin t + \sin t - t \cos t}{\cos t - t \sin t - t \sin t + t^2 \cos t} \\ &= \frac{(t^2 + 1) \sin t}{(t^2 + 1) \cos t} = \frac{\sin t}{\cos t} \\ &= \tan t \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = t$$

これより, 円周上の接点の座標は $(\cos t, \sin t)$ で接線はこの点の動径に垂直なので, $\mathbf{b} = (\sin t \ -\cos t)$.

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (t \cos t \ t \sin t) \cdot (\sin t \ -\cos t) \\ &= t \cos t \sin t - t \sin t \cos t \\ &= 0 \end{aligned}$$

よって, \mathbf{a} と \mathbf{b} は垂直である.



(4枚中4枚目)

[4]
(解答)

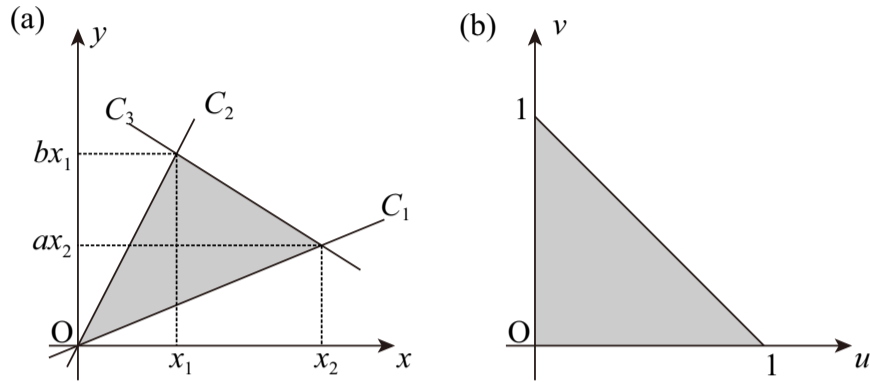


図1 (a)(x, y) 平面, (b)(u, v) 平面での積分領域

(1) (u, v) での積分領域

この座標変換は

$$\begin{cases} x \\ y \end{cases} = \begin{bmatrix} x_2 & x_1 \\ ax_2 & bx_1 \end{bmatrix} \begin{cases} u \\ v \end{cases} \quad (1)$$

で書くことができる. 右辺行列を A とすると, $\det A = (b-a)x_2x_1$ は所与の条件から正定数であるので A は全域で正則である. したがって, (x, y) と (u, v) は一対一対応である.

領域 D は C_1 より $D_1 := \{(x, y) | y - ax \geq 0\}$, C_2 より $D_2 := \{(x, y) | y - bx \leq 0\}$, C_3 より $D_3 := \{(x, y) | y - \frac{ax_2 - bx_1}{x_2 - x_1}x - \frac{(b-a)x_2x_1}{x_2 - x_1} \leq 0\}$ として $D := D_1 \cap D_2 \cap D_3$.

(*) および D_1 より

$$(b-a)vx_1 \geq 0 \Rightarrow v \geq 0 \quad (2)$$

また D_2 より

$$(b-a)ux_2 \geq 0 \Rightarrow u \geq 0 \quad (3)$$

また D_3 より

$$\begin{aligned} u \left(\frac{(b-a)x_2x_1}{x_2-x_1} \right) &\leq -v \left(\frac{(b-a)x_2x_1}{x_2-x_1} \right) + \frac{(b-a)x_2x_1}{x_2-x_1} \\ &\Rightarrow u \leq 1-v \end{aligned} \quad (4)$$

これより, $u \leq 1, v \leq 1$ も導かれる.

(2) ヤコビアン

線素はそれぞれ

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \quad (5)$$

$$dy = \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \quad (6)$$

のように書ける. これより面素は

$$dxdy = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv \\ \frac{\partial y}{\partial u} du + \frac{\partial y}{\partial v} dv \end{pmatrix} \right| \quad (7)$$

$$= \left| \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right| dudv \quad (8)$$

$$= (b-a)x_2x_1 dudv \quad (9)$$

となり, ヤコビアンは $(b-a)x_2x_1$

(3) 積分の評価

$$\int_D (y - ax)^m (bx - y)^n dx dy = \int_0^1 \int_0^{1-u} ((b-a)vx_1)^m ((b-a)ux_2)^n (b-a)x_2x_1 dv du \quad (10)$$

$$= (b-a)^{m+n+1} x_2^{n+1} x_1^{m+1} \int_0^1 \int_0^{1-u} v^m u^n dv du \quad (11)$$

$$= (b-a)^{m+n+1} x_2^{n+1} x_1^{m+1} \frac{1}{m+1} \int_0^1 (1-u)^{m+1} u^n du \quad (12)$$

部分積分により

$$\int_0^1 (1-u)^{m+1} u^n du = \left[-\frac{1}{m+2} (1-u)^{m+2} u^n \right]_0^1 + \frac{n}{m+2} \int_0^1 (1-u)^{m+2} u^{n-1} du \quad (13)$$

$$= \frac{n}{m+2} \int_0^1 (1-u)^{m+2} u^{n-1} du \quad (14)$$

が得られる。これを繰り返すと帰納的に

$$\int_0^1 (1-u)^{m+1} u^n du = \frac{(m+1)!n!}{(m+n+1)!} \int_0^1 (1-u)^{m+n+1} du \quad (15)$$

となる。さらに、

$$\int_0^1 (1-u)^{m+n+1} du = \frac{1}{m+n+2} \quad (16)$$

であるから、

$$\int_0^1 (1-u)^{m+1} u^n du = \frac{(m+1)!n!}{(m+n+2)!} \quad (17)$$

よって、

$$\int_D (y - ax)^m (bx - y)^n dx dy = (b-a)^{m+n+1} x_2^{n+1} x_1^{m+1} \frac{m!n!}{(m+n+2)!} \quad (18)$$

