

<h1 style="margin: 0;">数 学</h1>
---------------------------------

(1枚中1枚目)

[1] 「1」から「8」までの数が書かれた玉が1個ずつ計8個、箱に入っている。箱から玉を非復元抽出（取り出した玉を箱に戻さない）で3個、あるいは復元抽出（取り出した玉を箱に戻してから新たに玉を取り出す）で3回取り出し、書かれていた数の総和を  $X$  とする。以下の各問いに答えよ。

- (1) 非復元抽出をするとき  $X$  が素数となる確率を求めよ。既約分数で記すこと。
- (2)  $u \in \{3, 4, \dots, 10\}$  とする。復元抽出をするとき  $X = u$  となる確率を、 $u$  を用いて記せ。
- (3) 復元抽出をするとき  $X = 13$  となる確率が  $3/32$  であることを示せ。
- (4) 復元抽出をするとき  $X$  が素数となる確率を求めよ。既約分数で記すこと。

[2] 以下の各問いに答えよ。

- (1)  $\mathbb{R}^3$  における次の3点  $A(0, 1, 1)$ ,  $B(1, 0, 1)$ ,  $C(\alpha, \beta, 1)$  に対する位置ベクトルを、それぞれ  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  とする。ベクトル  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  が一次従属となるための条件を求めよ。また、この時この3点が同一直線上にあることを示せ。
- (2)  $\mathbb{R}^3$  における平面  $z = 1$  上の相異なる3点  $D, E, F$  を考え、それらに対する位置ベクトルをそれぞれ  $\vec{d}, \vec{e}, \vec{f}$  とする。この3点に対する位置ベクトルが一次従属であることと、その3点が同一直線上にあることが同値であることを示せ。
- (3)  $\mathbb{R}^2$  における次の相異なる3点  $P(1, 4)$ ,  $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ,  $R(u, 4u^3)$  が同一直線上にあるとき、 $u$  の値を求めよ。

[3] 直交座標  $(x, y)$  上の点  $P$  の位置を、 $t$  を媒介変数として  $(x(t), y(t)) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t)$  で与え、この点が動いてできる曲線を  $r$  とする。このとき、以下の各問いに答えよ。ただし、 $t \geq 0$  とする。

- (1)  $t$  が0から  $u$  まで変化する間に、点  $P$  が曲線  $r$  の上を動く距離  $s$  を求めよ。
- (2) 曲線を  $y = f(x)$  の形で表すとき、 $f(x)$  が少なくとも2階微分可能であれば、曲線に局所的にあてはめた円の半径である曲率半径  $R$  は

$$R = \frac{\{1 + (dy/dx)^2\}^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$$

で得られる。この公式を利用して、 $t > 0$  において、媒介変数表示された曲線  $r$  の曲率半径  $R$  を求めよ。

- (3) 点  $P$  から、原点を中心とする単位円  $x^2 + y^2 = 1$  に、点  $P$  から円の中心をみて右側に接線を引く。この接線が、点  $P$  における曲線  $r$  への接線に直交することを示せ。

[4]  $(x, y)$  平面において、 $D$  を  $C_1: y = ax$ ,  $C_2: y = bx$ ,  $C_3: y = \frac{ax_2 - bx_1}{x_2 - x_1}x + \frac{(b-a)x_2x_1}{x_2 - x_1}$  で囲まれる領域とする。ただし、 $x_2 > x_1 > 0$ ,  $b > a$  とする。このとき、以下の重積分を考える。

$$I = \int_D (y - ax)^m (bx - y)^n dx dy$$

ただし、 $m, n$  は任意の自然数とする。次の  $(u, v)$  から  $(x, y)$  への変数変換を導入する時、以下の問いに答えよ。

$$\begin{aligned} x &= x_2u + x_1v \\ y &= ax_2u + bx_1v \end{aligned} \tag{*}$$

- (1) (\*) の変数変換の  $(u, v)$  平面における積分領域を図示せよ。
- (2) (\*) の変数変換に対するヤコビアンを計算せよ。
- (3) 重積分  $I$  の値を  $a, b, m, n, x_1, x_2$  を用いて表せ。

数 学

解 答 紙

受 験 番 号

(4枚中1枚目)

[ 1 ]



数 学

解 答 紙

受 験 番 号

(4枚中2枚目)

[2]



数 学

解 答 紙

受 験 番 号

(4枚中3枚目)

[ 3 ]



数 学

解 答 紙

受 験 番 号

(4枚中4枚目)

[4]

